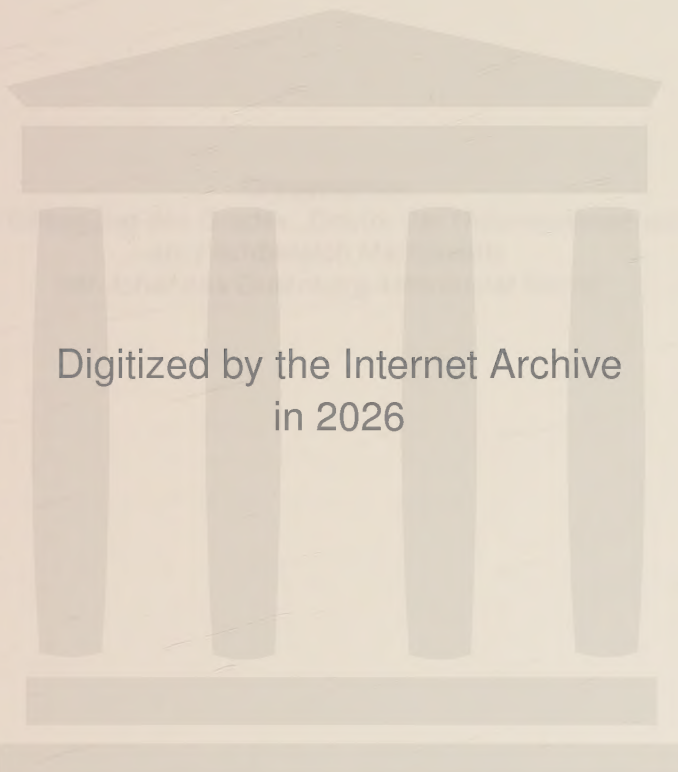


FRATTINIKLASSEN UND MAXIMALE TEILKLASSEN, INSBESONDERE ZU FORMATIONEN ENDLICHER GRUPPEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades „Doktor der Naturwissenschaft“
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Ute Christina Herzfeld
geb. in Lieser, Kreis Bernkastel-Wittlich

Mainz, April 1986



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554409_0006

FRATTINIKLASSEN UND MAXIMALE TEILKLASSEN, INSBESONDERE ZU FORMATIONEN ENDLICHER GRUPPEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades „Doktor der Naturwissenschaft“
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Ute Christina Herzfeld
geb. in Lieser, Kreis Bernkastel-Wittlich

Mainz, April 1986

Referenten: Prof. Dr. Klaus Doerk, Mainz

Prof. Dr. Otto H. Kegel, Freiburg

Prof. Dr. Robert Bryce, Canberra, Australien

Datum der mündlichen Prüfung: 26. Juni 1986

INHALT

	Seite
EINLEITUNG	3
1. GRUNDLAGEN	9
1.1. Bezeichnungen und Vorbemerkungen zu Abschlußoperatoren	9
1.2. Gruppentheoretische Vorüberlegungen	14
1.3. Hilfsmittel aus modularer Darstellungstheorie	20
2. FORMATIONEN UND ERZEUGNISSE	26
2.1. Allgemeine Lemmata über Formationen	26
2.2. Die minimale sd-Darstellung von $G \in \text{QR}_{\underline{0}} \underline{X}$	33
2.3. Bemerkungen über formationenkritische Gruppen	40
2.4. Anwendung auf Formationen, primitive Gruppen und nichtfrattinische Hauptfaktoren	44
2.5. Formationen von p-Gruppen in Beispielen	50
3. EINIGES ÜBER GESÄTTIGTE FORMATIONEN	54
3.1. Gesättigte Formationen und lokale Erklärungen	54
3.2. Zur Basis einer gesättigten Formation	60
4. DAS KONZEPT DER FRATTINIKLASSE	65
4.1. Definition der Frattiniklasse und erste Folgerungen	65
4.2. Beispiele zu Frattiniklassen mit einfachen Operatoren	70
4.3. PQ-Frattiniklassen	77

	Seite
5. QR_0 -FRATTINIKLASSEN	80
5.1. Einige Beispiele zu QR_0 -Frattiniklassen	80
5.2. Ein Φ_{QR_0} -Kriterium und Konsequenzen	85
5.3. Gesättigte Formationen ohne maximale Teil- formationen	92
6. SF-FRATTINIKLASSEN	101
6.1. Einige Bemerkungen zu SF-Frattiniklassen	101
6.2. Ansatz zur Bestimmung der SF-Frattiniklassen über QR_0 -Frattiniklassen lokaler Erklärungen	104
6.3. Ansatz zur Bestimmung der SF-Frattiniklassen über PQ-Frattiniklassen	112
6.4. Zusammenfassung über lokale Erklärung der SF-Frattiniklasse	117
ANHANG	125
LITERATUR	131
LEBENS LAUF	134

EINLEITUNG

Der Gegenstand dieser Arbeit zur Theorie der endlichen Gruppen kann unter zwei Aspekten betrachtet werden, dies sei zunächst für Formationen endlicher Gruppen dargestellt:

Der erste ist das Problem, Teilformationen einer gegebenen Formation zu finden. Nach einem Resultat von BRYANT, BRYCE und HARTLEY [3] hat die Formation, die von einer endlichen auflösbaren Gruppe erzeugt wird, nur endlich viele und folglich maximale Teilformationen. Allgemein ist die Frage, welche Typen von Formationen überhaupt maximale Teilformationen zulassen. Wir werden eine große Klasse gesättigter Formationen ohne maximale Teilformationen beschreiben.

Der zweite Aspekt kommt aus dem Kontext des Erzeugnisses unter den Abschlußoperatoren Q und R_0 (die Bilden von Faktorgruppen und residuellen Produkten respektive bezeichnen). Die Wirkung des Operators QR_0 gibt in der Formationentheorie noch Fragen auf.

Auch auf der Seite der Methoden begegnen sich zwei Felder: Das eine ist natürlich das des Arbeitsgebiets der Klassen endlicher Gruppen, hier der Formationen. Das andere Feld ist die Theorie der Varietäten, die von dem Zweig unendlicher Gruppen, beschrieben durch Erzeugende und Relationen, stammt, eine Theorie, die hauptsächlich in Australien entwickelt wurde (Als beste Referenz ist hier das Buch [20] von H. NEUMANN zu nennen.). Weil die Varietäten endlicher

Gruppen genau die QSD_0 -abgeschlossenen Klassen im Universum $\underline{E}$ endlicher Gruppen sind, weisen sie Verwandtschaft mit QR_0 -abgeschlossenen Klassen, eben Formationen, auf (D_0 bezeichnet den Abschluß unter endlichen direkten Produkten, S unter Untergruppen, $QR_0 \subseteq QSD_0$). Wir werden sehen, daß einige Resultate über Varietäten tatsächlich Analoga in Formationentheorie haben (diese werden unter dem Stichwort "subdirekte Darstellung" bewiesen (Teil 2)).

Wie hängt nun all dies mit dem Frattinikonzept zusammen? Frattiniklassen wurden erfunden, um den Effekt des Erzeugnisses untersuchen zu können. Nach Definition ist die QR_0 -Frattiniklasse die Klasse all der Gruppen, die in jedem Erzeugendensystem einer gegebenen Formation $\underline{F}$ ausgelassen werden können, präzise

$$\phi_{QR_0}(\underline{F}) := \{G \mid G \in \underline{F}, \text{ Ist } \underline{H} \in \underline{F} \text{ mit } \underline{F} = QR_0(G, \underline{H}), \text{ so ist } \underline{F} = QR_0(\underline{H})\}.$$

Weil die QR_0 -Frattiniklasse nicht nur die Teilformation der Nichterzeugenden ist, sondern auch durch die "Frattini"-Eigenschaft charakterisiert wird, der Durchschnitt der maximalen Teilobjekte zu sein, falls solche existieren, andernfalls aber gleich der Ausgangsklasse $\underline{F}$ (Abschnitt 4.1.), ist sie ein gutes Handwerkszeug, die Frage nach der Existenz maximaler Teilformationen zu behandeln. Läßt sich wiederum nachweisen, daß $\phi_{QR_0}(\underline{F}) = \underline{F}$ gilt, so ist damit gezeigt, daß $\underline{F}$ keine maximalen Teilformationen hat. Dies trifft zum Beispiel auf die Klasse S_p der p -Gruppen zu (5.1.1).

Mit Hilfe der sogenannten "minimalen sd-Darstellung" (sd-subdirekt) entwickeln wir einige Kriterien, denen zufolge

eine Gruppe in der Formationen-Frattiniklasse liegt (Abschnitt 5.2.). Damit können wir unter anderem beweisen, daß eine gesättigte Formation mit gesättigter lokaler Erklärung keine maximalen Teilformationen hat (5.3.4). Beispiele solcher Klassen sind durch primitiv gesättigte Formationen im Sinn von T.O. HAWKES [16] gegeben, etwa die Klasse $\underline{N}^n$ von Gruppen nilpotenter Länge höchstens n oder die Klassen von Gruppen beschränkter p -Länge, allgemeiner Produkte von Klassen der Form $\underline{S}_\pi$ (auflösbare π -Gruppen) (vgl. [4]), aber auch Klassen der Gestalt $\underline{NF}$ für eine gesättigte Formation $\underline{F}$. Problematisch ist in der Formationentheorie die Behandlung frattinischer Hauptfaktoren. Im Frattiniklassenkontext ist der Satz (5.2.11) über primitive Gruppentypen frattinischer Hauptfaktoren eine Hilfe. Doch bleibt die Frage offen, ob es eine gesättigte Formation mit maximalen Teilformationen gibt. Jedenfalls ist Sättigung kein notwendiges Kriterium für Trivialität der Frattiniklasse, wie das Beispiel der Formation der abelschen Gruppen zeigt (5.1.3).

Wie für QR_0 , so läßt sich auch für einen allgemeinen Abschlußoperator A im Sinn von P. HALL [15] die A -Frattiniklasse als Klasse der Nichterzeugenden für eine A -abgeschlossene Klasse $\underline{X}$ definieren, diese ist wieder Schnitt A -maximaler Teilklassen.

In der Literatur ist das Erzeugnis einzelner Operatoren bisher in sehr unterschiedlichem Maß erfaßt worden: Für den Operator $\{S_n, N_0\}$ der Fittingklassen ist nicht einmal die Fittingklasse bekannt, die von der symmetrischen Gruppe

S_3 erzeugt wird (vgl. CAMINA [5]). J. PENSE [23] bestimmt die Frattiniklasse von Fittingklassen wie zum Beispiel der Klasse $\underline{S}$ der auflösbaren Gruppen und von $\underline{S}_n$, der kleinsten normalen Fittingklasse in $\underline{S}$. Für Teilklassen (gesättigter) Formationen wurde schon die Arbeit [3] von BRYANT, BRYCE und HARTLEY erwähnt. Gesättigte Formationen sind vermöge der lokalen Erklärung recht gut zugänglich (Satz von GA-SCHÜTZ, LUBESSEDER, SCHMID [24]; DOERK [8], vgl. [17, VII], [13]). Für Schunckklassen wurde das Problem des Erzeugnisses im Prinzip schon in der Arbeit von SCHUNCK [25] gelöst.

So können bei abstrakter Betrachtung allgemeiner Operatoren nur für einfache Operatoren wie Q , R_0 , D_0 , S , S_n , E_ϕ konkrete Ergebnisse erzielt werden (4.2.). Für tieferliegende Aussagen sind die spezifischen Eigenschaften einzelner Operatoren auszunutzen.

Einerseits als Anwendung der Ergebnisse über QR_0 -Frattiniklassen, andererseits zur Untersuchung gesättigter Formationen an sich, widmen wir einen Hauptteil (6.) der Betrachtung der SF-Frattiniklasse ("SF" stehe für den Abschlußoperator $\{E_\phi, Q, R_0\}$ gesättigter Formationen.). Methodische Hauptergebnisse entstehen aus dem Zusammenhang der SF-Frattiniklasse mit der Schunck- (PQ-)Frattiniklasse und mit der Formationen-Frattiniklasse (6.3.1), (6.2.1):

- Die PQ-Frattiniklasse der gesättigten Formation $\underline{X}$ auflösbaren Gruppen ist in der SF-Frattiniklasse von $\underline{X}$ enthalten.
- Die durch die QR_0 -Frattiniklassen der minimalen lokalen Erklärung von $\underline{X}$ lokale definierte Formation ist in der SF-Frattiniklasse von $\underline{X}$ enthalten.

Beide Ansätze stellen unterschiedliche Beiträge zur SF-Frattiniklasse. Mit der zweiten Aussage erhalten wir als Korollar zu Satz (5.3.4) über QR_0 -Frattiniklassen das inhaltliche Hauptergebnis über SF-Frattiniklassen: Eine gesättigte Formation hat keine maximalen gesättigten Teilformationen, falls ihre minimalen lokalen Formationen gesättigt mit gesättigter lokaler Erklärung sind (6.2.5). Beispiele sind primitiv gesättigte Formationen oberhalb $\underline{N}^2$ (für die Klasse $\underline{N}$ der nilpotenten Gruppen ist $\Phi_{SF}(\underline{N})=(1)$) oder Klassen der Gestalt $\underline{N}^2 \underline{F}$ für eine gesättigte Formation $\underline{F}$. Im Unterschied zur QR_0 -Frattiniklasse kennen wir hier mit der Klasse $\underline{U}$ der überauflösbaren Gruppen eine gesättigte Formation mit maximalen Teilstrukturen.

Ein großer Teil der Arbeit über Gruppenklassen besteht in der Konstruktion geeigneter Beispiele.

Die notwendigen Hilfsmittel aus Gruppentheorie und modularer Darstellungstheorie werden in den Abschnitten (1.2.) und (1.3.) bereitgestellt.

In Teil (2.) wird die Technik der minimalen subdirekten Darstellung einer Gruppe $G \in QR_0 \underline{X}$ für eine Klasse $\underline{X}$ eingeführt. Neben einem Exkurs über formationenkritische Gruppen (2.3.) erlaubt diese Methode einen kurzen Beweis einer Beschreibung von Formationen mit nichtfrattinischen Hauptfaktoren in Verallgemeinerung einer Note von BLESSENHOHL und BREWSTER [1] (2.4.9). Um im Frattiniklassenkontext Beispiele zur Problematik frattinischer Hauptfaktoren zu haben, werden in (2.5.) Formationen charakterisiert, die von p-Gruppen von Klasse höchstens 3 erzeugt werden.

Gesättigte Formationen betrachten wir meistens vermöge ihrer lokalen Erklärung, hier verfolgen wir einen Ansatz von COSSEY und OATES-MACDONALD [7], um zu zeigen, daß eine Reduktion auf ein erzeugendes Homomorph anstelle der gesättigten Formation möglich ist (3.1.2). Eine weitere Erleichterung des Beweisvorganges erlaubt das Konzept der SF-Basis gesättigter Formationen, das wir nach dem Vorbild der Schunckbasis (vgl. [25]) entworfen haben (3.2.).

Herrn Professor Doerk danke ich herzlich für den Vorschlag einer Arbeit über "Frattiniklassen" und für die fortwährende gute Betreuung während ihrer Entstehung.

Mein Dank gilt auch der Studienstiftung des deutschen Volkes für die Unterstützung meines Studiums und die Möglichkeit eines Auslandsjahres an der University of Warwick, Coventry/England, das mir insbesondere die Gruppentheorie näher brachte.

Nicht zuletzt sei an dieser Stelle meinen Eltern Dank gesagt.

1. GRUNDLAGEN

1.1. Bezeichnungen und Vorbemerkungen zu Abschluß- operatoren

Alle betrachteten Gruppen seien endlich, insbesondere bezeichnen G , X stets endliche Gruppen und $\underline{X}$ eine Klasse endlicher Gruppen. Allgemein stehe "Klasse" für "Klasse endlicher Gruppen". Es sei stets A ein Abschlußoperator (vgl. (1.1.1)).

(1.1.1) Abschlußoperatoren und Klassen:

Eine Klasse enthält mit X auch alle zu X isomorphen Gruppen. Nach P. HALL [15] heißt A Abschlußoperator, wenn für alle Klassen $\underline{X}$, $\underline{Y}$ von Gruppen die Bedingungen

$$(1) \underline{X} \leq A\underline{X} \quad (2) A\underline{X} = A^2\underline{X} \quad (3) (\underline{X} \leq \underline{Y} \Rightarrow A\underline{X} \leq A\underline{Y})$$

erfüllt sind. Die Bedingungen stellen sicher, daß der Durchschnitt A -abgeschlossener Klassen (Klassen $\underline{X}$ mit $A\underline{X} = \underline{X}$) wieder A -abgeschlossen ist und daß $A\underline{X}$ die kleinste A -abgeschlossene Klasse ist, die $\underline{X}$ enthält. Für zwei Abschlußoperatoren A , B ist $\{A, B\}$ wieder ein Abschlußoperator (mit $\{A, B\}\underline{X} = \underline{X}$ äquivalent zu $A\underline{X} = B\underline{X} = \underline{X}$), im allgemeinen aber nicht das Produkt AB mit $AB\underline{X} := A(B\underline{X})$. Gilt jedoch $BA \leq AB$ (im Sinn von $BAX \leq ABX$ für alle Klassen $\underline{X}$), so ist $AB = \{A, B\}$.

Alle betrachteten Abschlußoperatoren mögen endliche Abschluß-eigenschaft (EA) erfüllen:

(EA) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sind } \underline{X}, \underline{Y} \text{ Klassen und ist } \underline{X} \text{ endlich mit } \underline{X} \subseteq \underline{A}\underline{Y}, \text{ so} \\ \text{gibt es eine endliche Klasse } \underline{Z} \subseteq \underline{Y} \text{ mit } \underline{X} \subseteq \underline{A}\underline{Z}. \end{array} \right.$

Dabei heiße $\underline{X}$ endlich, falls $\underline{X}$ nur endlich viele paarweise nichtisomorphe Gruppen enthält.

LEMMA: Seien $A_1, \dots, A_n$ Abschlußoperatoren mit (EA).

Dann gelten:

(a) Sind $\underline{X}, \underline{Y}$ Klassen und ist $\underline{X}$ endlich mit $\underline{X} \subseteq (A_1 \dots A_n)\underline{Y}$, so gibt es eine endliche Klasse $\underline{Z} \subseteq \underline{Y}$ mit $\underline{X} \subseteq (A_1 \dots A_n)\underline{Z}$.

(b) Der Abschlußoperator $\{A_1, \dots, A_n\}$ erfüllt (EA).

Beweis: (a) Wir verwenden Induktion über n ; für $n=1$ gilt

(a) nach Voraussetzung. Seien also $\underline{X}, \underline{Y}$ Klassen, $\underline{X}$ endlich mit $\underline{X} \subseteq (A_1 \dots A_n)\underline{Y}$. Da A_1 endliche Abschlußeigenschaft hat, gibt es eine endliche Klasse $\underline{H} \subseteq (A_2 \dots A_n)\underline{Y}$ mit $\underline{X} \subseteq A_1 \underline{H}$. Per Induktion existiert zu $\underline{H}$ eine endliche Klasse $\underline{Z} \subseteq \underline{Y}$ mit $\underline{H} \subseteq (A_2 \dots A_n)\underline{Z}$. Also ist $\underline{X} \subseteq (A_1 \dots A_n)\underline{Z}$.

(b) Ist $\underline{Y}$ eine Klasse und ist $\underline{X}$ eine endliche Klasse mit $\underline{X} \subseteq \{A_1, \dots, A_n\}\underline{Y}$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\underline{X} \subseteq (A_1 \dots A_m)^m \underline{Y}$, und mit Teil (a) folgt die Behauptung. q.e.d.

Für einen Abschlußoperator A bezeichne $(A-1)$ nichttriviale Darstellung, definiert durch

$$(A-1)\underline{X} = \langle G \mid G \in A(\underline{X} \setminus \{G\}) \rangle.$$

Hat eine A -abgeschlossene Klasse $\underline{X}$ zwei disjunkte erzeugende Teilklassen, so ist offensichtlich $(A-1)\underline{X} = \underline{X}$, und mit $\underline{X}$ ist $(A-1)\underline{X}$ auch A -abgeschlossen. Eine A -Teilklassse ist eine A -abgeschlossene Teilklassse, A -maximale Klassen sind wie folgt definiert:

DEFINITION: Eine Klasse $\underline{Y}$ heiße A-maximal in $\underline{X}$ (kurz:

$\underline{Y}$ A-max $\underline{X}$), falls (1) und (2) gelten:

$$(1) \underline{Y} = A\underline{Y} \in \underline{X}$$

$$(2) \text{ Ist } \underline{Z} = A\underline{Z} \text{ mit } \underline{Y} \leq \underline{Z} \leq \underline{X}, \text{ so ist } \underline{Y} = \underline{Z} \text{ oder } \underline{Z} = \underline{X}.$$

Für die häufigsten Abschlußoperatoren sind folgende Bezeichnungen üblich:

$S \underline{X} := (G | G \trianglelefteq H \in \underline{X})$ für Abschluß unter Untergruppen,

$S_n \underline{X} := (G | G \text{ subnormal in } H \in \underline{X})$ Subnormalteilern,

$Q \underline{X} := (G | G \cong H/N \text{ für } H \in \underline{X} \text{ mit } N \trianglelefteq H)$ epimorphen Bildern,

$R_o \underline{X} := (G | G/N_i \in \underline{X} \text{ für } N_i \trianglelefteq G, 1 \leq i \leq n, \bigcap_{i=1}^n N_i = 1)$ residuellen Produkten,

$D_o \underline{X} := (G | G = G_1 \times \dots \times G_n, G_i \in \underline{X}, 1 \leq i \leq n)$ direkten Produkten,

$N_o \underline{X} := (G | G = \langle U_i | 1 \leq i \leq n \rangle, U_i \text{ subnormal in } G, U_i \in \underline{X})$ normalen
Produkten,

$E_\phi \underline{X} := (G | G/N \in \underline{X}, N \trianglelefteq G, N \leq \Phi(G))$ für Sättigung.

Weiter bezeichne $P\underline{X} := (G | Q(G) \cap P \in \underline{X})$ die primitiven epimorphen

Bilder in $\underline{X}$ (dies ist kein Abschlußoperator, aber PQ) und

$M\underline{X} := Q\underline{X} \cap \underline{M}$ die monolithischen epimorphen Bilder von $\underline{X}$ (zu $\underline{P}$,
 $\underline{M}$ vgl. S. 12). Damit sind Homomorphe Klassen mit Q-Abschluß,

Formationen mit $\{Q, R_o\} = QR_o$ -Abschluß, Schunckklassen mit

PQ -Abschluß, Fittingklassen mit $\{N_o, S_n\}$ -Abschluß, gesättigte

Formationen mit $\{E_\phi, Q, R_o\}$ -Abschluß. Nach [12, vor 3.9] ist

$\{E_\phi, Q, R_o\} = (QR_o E_\phi)^2$, wir schreiben SF dafür. Für grundlegende

Resultate in der Theorie der Schunckklassen, Formationen und

gesättigten Formationen sei auf [8], [9], [11], [12], [13], [14],

[17] verwiesen.

Nach Definition haben die genannten Operatoren endliche Ab-

schlueigenschaft (EA), also mit dem Lemma insbesondere auch

SF und QR_o .

Im Universum der unendlichen Gruppen ist das Bilden cartesischer Produkte (vgl. [20, S. 14]) ein Abschlußoperator, der (EA) nicht erfüllt.

Weiterhin bezeichnen für Klassen $\underline{X}$ und $\underline{Y}$

$\text{char } \underline{X} := \{p | p \nmid |X| \text{ für ein } X \in \underline{X}\}$ die Charakteristik von $\underline{X}$,

$G_{\underline{X}}^X := \cap \{N | N \trianglelefteq G, G/N \in \underline{X}\}$ das Residuum von $\underline{X}$ in G für $\underline{X} = \text{QR}_0 \underline{X}$,

$G_{\underline{X}} := \cap \{N | N \trianglelefteq G, N \in \underline{X}\}$ das Radikal von $\underline{X}$ in G für $\underline{X} = \{N_0, S_n\} \underline{X}$,

$\underline{X}\underline{Y} := (G | G \in \underline{X})$ das Formationenprodukt für $\underline{Y} = \text{QR}_0 \underline{Y}$,

$\underline{X}\underline{Y} := (G | G/G_{\underline{Y}} \in \underline{Y})$ das Fittingklassenprodukt für $\underline{X} = \{N_0, S_n\} \underline{X}$
(vgl. [14, VII.1 und X.5,6]),

$\underline{X}^n$ das n-fache Produkt von $\underline{X}$ (gemäß den Abschlußeigenschaften von $\underline{X}$).

Spezielle Klassen sind die Klassen

$\underline{E}$ der endlichen Gruppen,

$\underline{S}$ der auflösbaren Gruppen,

$\underline{N}$ der nilpotenten Gruppen,

$\underline{A}$ der abelschen Gruppen,

$\underline{K} := D_0(C_p | p \in \mathbb{P})$ der elementar-abelschen Gruppen i.w.S.,

für die bisher genannten Klassen seien $\underline{X}_{\Pi} = \underline{X} \wedge \underline{E}_{\Pi}$ und $\underline{X}_p = \underline{X} \wedge \underline{S}_p$,
wobei $\underline{E}_{\Pi}$, $\underline{S}_p$ die Klassen der Π -Gruppen und p -Gruppen sind, und

$\underline{M}$ der monolithischen Gruppen,

$\underline{P}$, $\underline{P}_i^p$ der primitiven Gruppen, für $i \in \{1, 2, 3\}$ vom Typ i , deren
Sockel von p geteilt wird (vgl. [13, section 1]),

$\underline{R}$ der Gruppen ohne frattinische Hauptfaktoren,

$\underline{U}$ der überauflösbaren Gruppen.

(1.1.2) Vereinbarungen:

Die Standardbezeichnungen entsprechen denen in [7, 18], insbesondere seien

$\mathbb{F}_p^n$	das Galoisfeld mit p^n Elementen,
$\mathbb{P}, \mathbb{N}$	die Mengen der Primzahlen und natürlichen Zahlen,
π	eine Teilmenge von $\mathbb{P}$ und $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$,
p, q, r	Primzahlen, $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$,
n	eine natürliche Zahl,
$\pi(G)$	$:= \{p \mid p \mid G \}$,
G_p, G_π	eine p -Sylowgruppe, π -Hallgruppe von G ,
$O_p(G), O_\pi(G)$	den größten p - bzw. π -Normalteiler von G ,
$O_{p',p}(G)$	den durch $O_{p',p}(G)/O_p(G) = O_p(G/O_{p',p}(G))$ definierten Normalteiler von G ,
$S(G)$	den Sockel von G ,
$S_p(G), S_J(G)$	den p -Anteil bzw. nichtabelschen Anteil von $S(G)$,
$H_G = \text{Core}_G(H)$	$:= \bigcap \{H^g \mid g \in G\}$ das Core von H in G für $H \leq G$,
$\text{Comp}(G)$	die Menge der Kompositionsfaktoren von G ,
$R(V)$	das Jacobson-Radikal eines Moduls V .
$X \cong_G Y$	heiße, X und Y sind G -isomorph,
$N \triangleleft G$,	N ist minimaler Normalteiler von G ,
$H < G$,	H ist maximale Untergruppe von G ,
$\pi_1: G \rightarrow G_1$,	π_1 ist Projektion von $G = G_1 \times \dots \times G_n$ auf die direkte Komponente G_1 mit Kern $\pi_1 = G_1 \times \dots \times G_{i-1} \times G_{i+1} \times \dots \times G_n$,
$S \text{ sd } G$,	S ist subdirekt in $G = G_1 \times \dots \times G_n$, dh. $G\pi_1 = G_1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$
$\text{Pr}(G, H/K)$	bezeichne für einen Hauptfaktor H/K von G die <u>primitive Gruppe vom Typ H/K in G</u> , definiert als
$\text{Pr}(G, H/K) = \begin{cases} G/C_G(H/K)[H/K] & \text{falls } H/K \text{ abelsch} \\ G/C_G(H/K) & \text{sonst} \end{cases}$	
(vgl. (2.1.2)).	

1.2. Gruppentheoretische Vorüberlegungen

(1.2.1) DEFINITION (lexikographische Ordnung; vgl. [19, 1.1]):

(a) Sind $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_m)$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ monoton fallende Folgen natürlicher Zahlen, so heiße $(a_1, \dots, a_n)$ lexikographisch kleiner als $(b_1, \dots, b_m)$, falls es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $a_i = b_i$ für $i < j$ und $(a_j < b_j$ oder $j-1 = n < m)$ gibt.

(b) Die Abbildung ν ordne jeder endlichen Klasse $\underline{X}$ von Gruppen die monoton fallende Zahlenfolge der Ordnungen der Gruppen aus $\underline{X}$ (nach geeigneter Sortierung) zu. Sind $\underline{X}$, $\underline{Y}$ endliche Klassen von Gruppen, so heiße $\underline{X}$ lexikographisch kleiner als $\underline{Y}$ (kurz $\underline{X} < \underline{Y}$), falls dies für $\nu \underline{X}$ und $\nu \underline{Y}$ gilt.

(c) Entsprechend sei in (a) und (b) Gleichheit definiert.

(1.2.2) BEISPIEL: Mit C_t für die zyklische Gruppe der Ordnung t gilt $(C_3, C_3, C_3) < (C_4, C_2) = (C_2, C_2 \times C_2)$ bezüglich lexikographischer Ordnung.

(1.2.3) DEFINITION (Similarität [20, 53.11]):

Seien X , Y Gruppen, und seien H/K und R/S Hauptfaktoren von X und Y respektive. Dann heißt

$(H/K \text{ in } X)$ similar zu $(R/S \text{ in } Y)$,

falls es Isomorphismen $\mu: H/K \rightarrow R/S$ und $\alpha: X/C_X(H/K) \rightarrow Y/C_Y(R/S)$ mit $(h^x)_\mu = (h\mu)^{x\alpha}$ für alle $h \in H/K$ und $x \in X/C_X(H/K)$ gibt.

(1.2.4) BEMERKUNG: Es ist bekannt, daß genau dann $(H/K \text{ in } X)$ similar zu $(R/S \text{ in } Y)$ ist, wenn $\text{Pr}(X, H/K) = \text{Pr}(Y, R/S)$ (mit Notation wie in (1.2.3)) gilt.

In Hinblick auf spätere Anwendung notieren wir die folgende spezielle Aussage; sie erlaubt die Kontrolle des Sockels einer Erweiterung in bestimmten Situationen:

(1.2.5) LEMMA: Sei G eine Gruppe mit einem Normalteiler $N = N_1 \times \dots \times N_n$, wobei $N_i \trianglelefteq G$ für $i \in \Omega := \{1, \dots, n\}$ sei. Es seien Untergruppen Q_i von N_i gegeben, die für alle $i \in \Omega$ normal in G seien, und es bezeichne $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$ ihr direktes Produkt und $K_i := \bigcap_{j \neq i, j \in \Omega} N_j$. Weiter seien Epimorphismen $\beta: G \rightarrow \bar{G} := G/Q$ und $\alpha_i: G \rightarrow \tilde{G}_i := G/K_i$ ($i \in \Omega$) von G gegeben, für eine Untergruppe $U \trianglelefteq G$ bezeichnen $\bar{U} := U\beta$ und $\tilde{U}_i := U\alpha_i$ die Bilder von U unter β und α_i respektive. Mit $\tilde{W}_i := S(\tilde{G}_i) \cap \tilde{N}_i$ sei W_i^0 das volle Urbild von $\tilde{W}_i$ unter α_i in G , und schließlich sei $W_i := N_i \cap W_i^0$. Sei $W := W_1 \times \dots \times W_n$. Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:

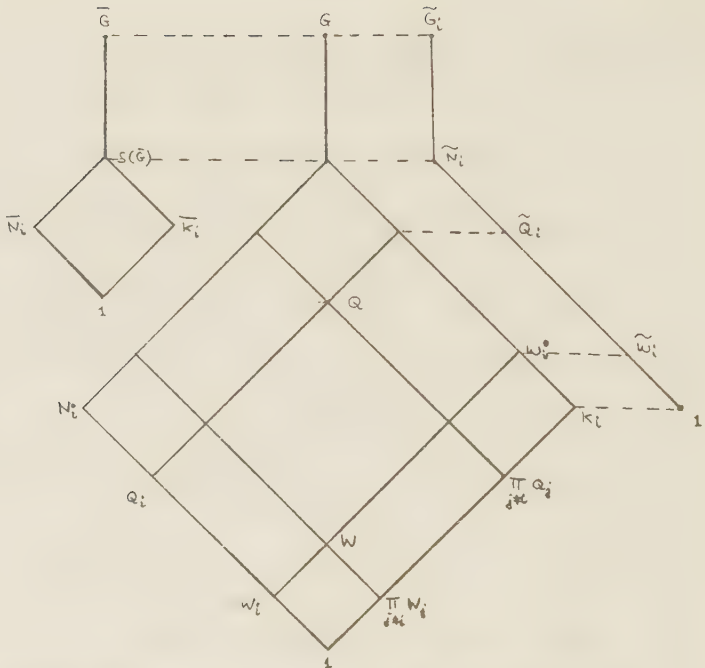
- (1) $\text{Comp}(N) = \text{Comp}(N_1) \cup \dots \cup \text{Comp}(N_n)$
- (2) $S(\bar{G}) = \bar{N}_1 \times \dots \times \bar{N}_n$
- (3) $S(\tilde{G}_i) \cap \tilde{N}_i = \tilde{W}_i \leq \tilde{Q}_i$ für alle $i \in \Omega$.

Dann ist $S(G) = W$.

Beweis (Diagramm siehe S. 16):

(1) Leicht folgt $W \leq S(G)$: Für jedes $i \in \Omega$ ist $\tilde{W}_i$ Produkt minimaler Normalteiler $\tilde{W}_{i_k}$ (für $k=1, \dots, n_i$ geeignet) von $\tilde{G}_i$. Sei $W_{i_k}^0$ das volle Urbild von $\tilde{W}_{i_k}$ in G , und $W_{i_k} := W_{i_k}^0 \cap N_i$. Es ist $W_{i_k}^0/K_i \cong_{\bar{G}} W_{i_k}$, folglich $W_i \leq S(G)$.

(2) Wir betrachten einen minimalen Normalteiler M von G . Dann muß M in N liegen, denn sonst wäre M G -isomorph zu



einem Hauptfaktor von G oberhalb N , das aber führte mit $M \cong \bar{M} \triangleleft \bar{G}$ und Voraussetzung (2) zum Widerspruch. Nach Eigenschaft (1) gehört der minimale Normalteiler M zu genau einer Menge $\text{Comp}(N_j)$ für ein $j \in \Omega$. Daher ist $M \cong M_{\alpha_j} = \tilde{M}_j \triangleleft \tilde{N}_j$, und $\tilde{M}_j \triangleleft \tilde{G}$. Zusammen mit Eigenschaft (3) folgern wir $\tilde{M} \leq S(\tilde{G}_j) \cap \tilde{N}_j = \tilde{W}_j$.

Also muß $W = S(G)$ gelten.

q.e.d.

Subdirekte Produkte spielen im Zusammenhang mit Formationen eine bedeutende Rolle, denn bekanntlich ist G genau dann in $\text{QR}_0(X_1, \dots, X_n)$ für Gruppen $X_1, \dots, X_n$ enthalten, wenn G Faktorgruppe einer subdirekten Untergruppe in $X_1, \dots, X_n$ ist (vgl. [3, section 1], auch (2.2.)). Die beiden nächsten

elementaren Lemmata sind aus KOVACS, NEWMAN [19] entnommen, sie gelten allgemein für subdirekte Produkte.

(1.2.6) LEMMA: Sei $X = X_1 \times \dots \times X_n$ direktes Produkt der Gruppen X_i ($i \in \Omega := \{1, \dots, n\}$), und S sei subdirekt in X . Für eine Untergruppe Y von X_j (ein $j \in \Omega$) sind die Aussagen (1) und (2) äquivalent:

$$(1) \quad Y \leq X_j$$

$$(2) \quad N_X(Y) \geq S$$

Beweis: Sei $j \in \Omega$. Die Inklusion $(1) \Rightarrow (2)$ ist trivial, da ein Normalteiler von X_j schon normal im direkten Produkt ist. Ist $N_X(Y) \geq S$, so ist (für die Projektion π_j wie in (1.1.2))

$$N_{X_j}(Y) = N_{X\pi_j}(Y\pi_j) \geq S\pi_j = X_j,$$

weil S subdirekt in X ist. Mit $Y \leq X_j$ ist nun $Y \leq X_j$. q.e.d.

(1.2.7) LEMMA: Sei $X = X_1 \times \dots \times X_n$ direktes Produkt monolithischer Gruppen X_i mit $i \in Q := \{1, \dots, n\}$. Sei S subdirekt in X mit $S(X) \leq S$, und sei $T \leq S$ mit $S(X_i) \cap T = 1$ und $S/T =: G$ monolithisch, sei $K_i := \bigcap_{j \neq i, j \in Q} X_j$ für alle $i \in Q$.

Weiter seien $R \leq S$ und $C \leq S$ durch $R/T = S(S/T)$ und $C/T = C_{S/T}(S(S/T))$ bestimmt.

Dann gelten für alle $i \in Q$:

- (1) $R = T S(X_i)$
- (2) $R \cap X_i = S(X_i)$
- (3) $C = S \cap \bigcap_{j=1}^n C_{X_j}(S(X_j)) = S \cap K_i C_{X_i}(S(X_i))$
- (4) $(S(X_i) \text{ in } X_i) \text{ similar zu } (S(S/T) \text{ in } S/T) \text{ similar zu } (S(G) \text{ in } G).$

Beweis: Sei $i \in Q$:

(1) Da $S(X_i) \leq S$ ist, folgt aus $S(X_i) \trianglelefteq Y_i$ gemäß (1.2.6) zunächst $S(X_i) \trianglelefteq S$, wieder mit (1.2.6) sogar $S(X_i) \trianglelefteq S$. Da G monolithisch ist, ist $S(S/T) = S(X_i)T/T \trianglelefteq S/T$, also ist $R = T S(X_i)$.

(2) Nun folgt mit Dedekind-Identität

$$T S(X_i) \cap X_i = S(X_i) (T \cap X_i) = S(X_i),$$

also $R \cap X_i = S(X_i)$.

(3) Unter Beachtung der Voraussetzungen und der Aussagen (1) und (2) berechnen wir

$$[S(X_i), C] \leq [T S(X_i), C] \cap S(X_i) = [R, C] \cap S(X_i) \leq T \cap S(X_i) = 1$$

Für $s = (s_1, \dots, s_n) \in C$ folgt $s_i \in C_{X_i}(S(X_i))$, daher ist

$$C \leq S \cap \bigcap_{j=1}^n C_{X_j}(S(X_j)) \leq S \cap K_i C_{X_i}(S(X_i)).$$

Es bleibt noch $S \circ K_i \circ C_{X_i}(S(X_i)) \leq C$ zu zeigen. Das folgt aus
 $[R, S \circ K_i \circ C_{X_i}(S(X_i))] = [T \circ S(X_i), S \circ K_i \circ C_{X_i}(S(X_i))] \leq [T, S] \leq T$.

(4) Nach Definition der Similarität (1.2.3) sind geeignete Abbildungen $\vartheta_i: S(S/T) \rightarrow S(X_i)$ und

$\psi_i: S/T \circ C/T \rightarrow X_i \circ C_{X_i}(S(X_i))$ zu definieren.

Ist $sT \in S(S/T)$, so gibt es, da nach Voraussetzung S sd X mit $S(X_i) \leq S$ und $S(X_i) \cap T = 1$ gelten, mit (1) und (2) eindeutig bestimmte $x_i \in S(X_i)$ und $t_i \in T$ mit $s = t_i x_i$.

Sei ϑ_i durch $\vartheta_i: sT = t_i x_i T \mapsto x_i$ gegeben. Offensichtlich ist ϑ_i Isomorphismus von $S(S/T)$ auf $S(X_i)$.

Ist $(uT) \circ C/T \in S/T \circ C/T$, so ist $u = k_i w_i$ mit eindeutig bestimmten $k_i \in K_i$ und $w_i \in X_i$.

Sei ψ_i durch $\psi_i: (uT) \circ C/T = (k_i w_i T) \circ C/T \mapsto w_i \circ C_{X_i}(S(X_i))$ gegeben. Mit (2) und (3) folgt, daß ψ_i ein Isomorphismus und mit ϑ_i im Sinne der Similarität verträglich ist:

$$\begin{aligned} ((sT)^{(uT)S/T})_{\vartheta_i} &= ((t_i x_i T)^{(k_i w_i T)S/T})_{\vartheta_i} \\ &\stackrel{(3)}{=} (x_i T)^{w_i C_{X_i}(S(X_i))} \\ &= (t_i x_i T)_{\vartheta_i} ((k_i w_i T)S/T)_{\psi_i}. \end{aligned}$$

Also ist $(S(S/T) \text{ in } S/T) \text{ similar zu } (S(X_i) \text{ in } X_i)$ für alle $i \in \Omega$ q.e.d.

1.3. Hilfsmittel aus modularer Darstellungstheorie

Gemäß der Charakterisierung der primitiven Gruppen des Typs 1 (vgl. [11, section 1]) ist die Existenz eines treuen irreduziblen $\mathbb{F}_p G$ -Moduls entscheidend dafür, daß G eine primitive Erweiterung $H \in \mathcal{P}_1^p$ mit $H/S(H) \cong G$ hat (1.3.1-b). Als grundlegende Referenz verwenden wir das folgende Existenzkriterium (1.3.1-a), das von PAHLINGS (vgl. [2, S. 15, 20]) im Zusammenhang mit Arbeiten von NAKAYAMA und GASCHÜTZ bewiesen wurde (vgl. [2, S. 15, 18-20]).

(1.3.1) LEMMA: Sei G eine Gruppe mit $O_p(G)=1$ und mit der Eigenschaft, daß der auflösbare Teil von $S(G)$ als Normalteiler von G von einem Element erzeugt wird.

Dann gelten:

- (a) Die Gruppe G hat einen treuen irreduziblen $\mathbb{F}_p$ -Modul.
- (b) Es gibt eine Gruppe $H \in \mathcal{P}_1^p$ mit $H/S(H) \cong G$.

Beweis zu (b) folgt mit der Vorbemerkung unmittelbar aus (a).

q.e.d.

Insbesondere ist die Voraussetzung des Lemmas (1.3.1-a) erfüllt, wenn die auflösbaren Füße von G paarweise nicht-isomorph sind. Ist dies nicht der Fall, so ermöglicht in bestimmten Situationen die elementare Überlegung (1.3.2) den Übergang zu einer geeigneten Faktorgruppe von G :

(1.3.2) LEMMA: Sei G eine Gruppe.

(a) Sind M und L abelsche minimale Normalteiler von G mit $M \ntrianglelefteq L$ und $M \cong_G L$, so gilt $F(G)/M = F(G/M)$.

(b) Es gibt einen Normalteiler N von G , so daß die Faktorgruppe $\bar{G} := G/N$ die Eigenschaften (1) und (2) hat:

(1) $F(G)/N = F(\bar{G})$

(2) Die abelschen minimalen Normalteiler von $\bar{G}$ sind paarweise nicht $\bar{G}$ -isomorph und korrespondieren genau zu den G -Isomorphietypen der abelschen minimalen Normalteiler von G .

(c) Sind $O_p(G)=1$ und $X \in Q(G/F(G))$, so gibt es eine Gruppe $H \in \mathcal{P}_1^p$ mit $X \in Q(H/S(H))$.

Beweis:

(a) Wegen $C_G(M)=C_G(L)$ nach Voraussetzung ist die Fittinggruppe von G durch

$$F(G) = \cap \{ C_G(H/K) \mid H/K \text{ Hauptfaktor von } G \text{ mit } H/K \ntrianglelefteq M/1 \}$$

gegeben. Betrachten wir eine Hauptreihe von G durch M , so gilt für alle Hauptfaktoren H/K außer für $M/1$ die Gleichheit

$$C_{G/M}(H/M/K/M) = C_G(H/K)/M,$$

insgesamt folgt $F(G/M) = F(G)/M$.

(b) folgt aus (a) per Induktion.

(c) Wenden wir (b) auf G an, so erhalten wir $X \in Q(\bar{G}/F(\bar{G}))$ für eine Faktorgruppe $\bar{G}$ von G , deren abelsche minimale Normalteiler paarweise nicht $\bar{G}$ -isomorph sind und für die $O_p(\bar{G})=1$ gilt.

Also erfüllt G die Voraussetzungen des Lemmas (1.3.1),
und (1.3.1-b) liefert eine geeignete Gruppe H .

q.e.d.

(1.3.3) BEMERKUNG: Mit Bezeichnungen wie in (1.3.2) ist
zu beachten, daß schon eine Gruppe G isomorph zum direkten
Produkt der zyklischen Gruppen C_4 und C_2 ein Beispiel für
 G/M nicht isomorph zu G/L (mit M, L geeignet) und für
 $QR_0(\bar{G}) \not\cong QR_0(G)$ gibt.

Eine tragende Konstruktion im Kontext der Frattiniklassen
ist die eines semidirekten Produktes einer Gruppe G mit
der projektiven Hülle eines G -Moduls. Sind G eine Gruppe,
 K ein Körper der Charakteristik p und V ein irreduzibler
 KG -Modul, so sei mit $P_G(V) =: P$ die projektive Hülle von V
als G -Modul bezeichnet. Dann ist bekannt (vgl. [18, VII
16.8, 10.14]), daß der Kopf $P/R(P)$ und der Fuß $S(P)$ von P
als KG -Moduln isomorph zu V sind. Satz (1.3.4) beruht auf
einem Resultat von W. WILLEMS [18, VII 14.6], nach dem in
dieser Situation der Zentralisator von P die Gestalt

$$C_G(P) = O_p(C_G(V))$$

hat. In (1.3.4) notieren wir Spezialfälle so, wie sie im
späteren Verlauf der Arbeit herangezogen werden.

(1.3.4) SATZ: Sei G Gruppe, und sei V irreduzibler $\mathbb{F}_p G$ -Modul für ein $p \in \mathbb{P}$. Es bezeichnen $P := P_G(V)$ die projektive Hülle von V als $\mathbb{F}_p G$ -Modul und $H := [P]G$ das semidirekte Produkt von P und G , und bezeichne W den Fuß $S(P)$. Werden Untergruppen von P und G mit entsprechenden Untergruppen von H identifiziert, so gelten:

(1-1) Ist $N \leq G$ und $N \cap O_p(C_G(V)) = 1$, so ist $S(H) \cap NP = W$.

(1-2) Insbesondere ist, falls $O_p(C_G(V)) = 1$, aber V nicht treu ist, der Fuß $S(H) = W$ frattinischer Monolith von H .

(2-1) Ist V der triviale Modul und $N \leq G$ mit $N \cap O_p(G) = 1$, so ist $S(H) \cap NP = W$.

(2-2) Insbesondere ist, falls V trivial und $O_p(G) = 1 \neq G$ ist, der Fuß $S(H) = W$ frattinischer zentraler Monolith von H .

(3-1) Sei $\underline{X}$ gesättigte Formation mit $p \in \text{char } \underline{X}$.

Ist $O_p(G) = 1$ und $1 \neq C_G(V)$ eine p -Gruppe, so ist mit $G \in \underline{X}$ auch $H \in \underline{X}$.

(3-2) Sei $\underline{X}$ gesättigte Formation mit $p \in \text{char } \underline{X}$.

Ist V der triviale Modul, so ist mit $G \in \underline{X}$ auch $H \in \underline{X}$.

Beweis:

(1-1) Nehmen wir an, daß es einen minimalen Normalteiler M von H mit $M \leq NP$ und $M \neq W$ gibt. Dann folgt $M \cap P = 1$. Ist $M \cap N = 1$, so gilt $MP \cap N \leq H$, also gibt es einen minimalen Normalteiler $M_1 \triangleleft H$ mit $M_1 \leq MP \cap N$, insbesondere mit $M_1 \leq N$. Daher können wir $M \leq N$ annehmen.

Andererseits führt $[P, M] \leq P \cap M = 1$ zu $M \leq C_G(P) = O_p(C_G(V))$ nach WILLEMS in [18, VII 14.6] im Widerspruch zu $M \leq N$ mit $N \cap O_p(C_G(V)) = 1$.

Somit kann es keinen minimalen Normalteiler von H innerhalb NP außer W geben.

(1-2) Die Tatsache $S(H)=W$ folgt sofort aus (1-1). Wir nehmen an, es gelte $W \neq \phi(H)$. Weil W der Monolith von H ist, muß die Frattinigruppe $\phi(H)$ trivial sein und folglich H primitiv mit $F(H)=O_p(H)=C_H(W)=W$ (vgl. [1, 1]). Aber wegen $W \not\cong V$ widerspricht das der Annahme, daß V treu ist. Darum ist W frattinisch.

Die Teile von (2) sind Spezialfälle der Aussagen unter (1).

(3-1) Nach (1-2) ist H monolithisch mit $S(H) \leq O_p(H)$. Zusammen mit $O_p(H)=1$ folgt

$$H/O_{p,p}(H) \cong H/O_p(H) \cong G/O_p(G) \cong G/O_{p,p}(G) \in \mathfrak{X}^*(p)$$

für die minimale lokale Erklärung $\mathfrak{X}^*$ von $\underline{X}$. Folglich ist $H \in \underline{S}_p \mathfrak{X}^*(p) \subseteq \underline{X}$.

(3-2) Mit $p \in \text{char } \underline{X}$ ist $G \times C_p \in \underline{X}$. Außerdem sind $H/R(H) \cong G \times C_p$ und $R(P) \leq \phi(H)$, und es folgt $H \in E_{\phi} \underline{X} = \underline{X}$. q.e.d.

(1.3.5) BEMERKUNGEN:

(a) Mit Bezeichnungen wie in (1.3.4) seien G isomorph zur zyklischen Gruppe C_2 und $p=3$. Ist V der nichttriviale $\mathbb{F}_3 G$ -Modul, so ist V selbst schon projektiv, da p nicht die Ordnung von G teilt. Also ist H isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 . Die Klasse $\underline{N}$ liefert ein Beispiel einer gesättigten Formation, die G , aber nicht H enthält.

(b) Um Gruppen mit frattinischen Hauptfaktoren zu bilden,

kann man sich nach (1-2) und (2-2) der Konstruktion aus (1.3.4) bedienen: Relevant sind wegen $R(P) = \phi(H) \cap P$ die Fälle, in denen $S(H) = W \leq R(P)$ ist, äquivalent, in denen es sich bei dem irreduziblen Modul V nicht schon um einen projektiven irreduziblen handelt. Bekanntlich sind die irreduziblen genau die projektiv unzerlegbaren $\mathbb{F}_p G$ -Moduln, falls p nicht die Ordnung von G teilt. Wichtiger für unseren Kontext ist jedoch die Frage der Existenz einer frattinischen Erweiterung zu gegebenem p , falls schon p -Hauptfaktoren von G vorliegen, oder falls p die Ordnung eines nichtabelschen Hauptfaktors von G teilt. Bei Schlüssen über die Similarität werden sogar frattinische Erweiterungen zu vorgegebenem primitivem Gruppentyp benötigt.

Jedoch ist es darstellungstheoretisch im allgemeinen nicht möglich, allein unter Vorgabe einer Gruppe G und einer Primzahl p zu entscheiden, ob ein irreduzibler $\mathbb{F}_p G$ -Modul projektiv ist. Dies zeigt schon das Beispiel der alternierenden Gruppe A_5 , die für alle $p \in \{2, 3, 5\} = \pi(A_5)$ sowohl projektive irreduzible Moduln als auch nichtprojektive irreduzible hat. Die Beschreibung der projektiven irreduziblen Moduln ist in der modularen Darstellungstheorie ein Problem, das nur in Spezialfällen gelöst ist.

2. FORMATIONEN UND ERZEUGNISSE

2.1. Allgemeine Lemmata über Formationen

Zum Sprachgebrauch bemerken wir (2.1.1):

(2.1.1) DEFINITION:

(a) Eine Eigenschaft (FE) heiße Formationeneigenschaft, wenn für alle Klassen $\underline{X}$ die Eigenschaft (FE) für alle Gruppen in $QR_0 \underline{X}$ gilt, sobald sie für alle Gruppen in $\underline{X}$ gilt.

(b) Für eine Formation $\underline{D}$ heiße eine Funktion $z: \underline{D} \rightarrow \mathbb{N}$ Formationeninvariante, wenn für alle $z_0 \in \mathbb{N}$ und für alle Klassen $\underline{X} \leq \underline{D}$ die Aussage $z(G) \leq z_0$ für alle $G \in QR_0 \underline{X}$ gilt, sobald $z(G) \leq z_0$ für alle $G \in \underline{X}$ gilt.

Beispiele für Formationeninvarianten sind Klasse, Exponent, nilpotente Länge, p-Länge, Klasse und Exponent der p-Sylowgruppen mit den üblichen Definitionsbereichen $\underline{D}$, aber etwa nicht die Gruppenordnung. Insbesondere ist " $z(G) \leq z_0$ " für eine Formationeninvariante z und ein $z_0 \in \mathbb{N}$ eine Formationeneigenschaft.

Eine Formation enthält bekanntlich mit G auch den primitiven Gruppentyp $\text{Pr}(G, H/K)$ eines Hauptfaktors H/K in G (vgl. [3, 1.8]). Darüber hinaus gilt folgender einfacher, aber nützlicher Zusammenhang:

(2.1.2) LEMMA: Sei H/K nichtfrattinischer Hauptfaktor einer Gruppe G .

(a) Dann ist $\text{Pr}(G, H/K) \in Q(G)$.

(b) Ist zusätzlich $H \leq G^{\underline{F}}$ für eine Formation $\underline{F}$, so ist $\text{Pr}(G, H/K) \notin \underline{F}$.

Beweis: Wir beweisen (a) und (b) gleichzeitig.

(1) Ist H/K abelsch, so gilt für ein Komplement U von H/K in G bekanntlich

$$\text{Pr}(G, H/K) = G/C_G(H/K) [H/K] \cong G/U_G \in Q(G).$$

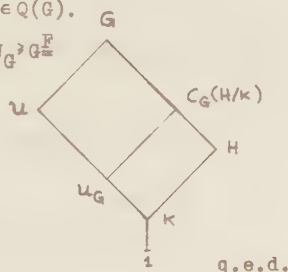
Ist zusätzlich $H \leq G^{\underline{F}}$, so kann nicht $U_G \in G^{\underline{F}}$ gelten. (Skizze)

(2) Ist H/K nichtabelsch, so ist

$$\text{Pr}(G, H/K) = G/C_G(H/K) \in Q(G)$$

klar. Mit $H \leq G^{\underline{F}}$ ist $G^{\underline{F}} \leq C_G(H/K)$

ausgeschlossen.



(2.1.3) BEMERKUNG: Für frattinische Hauptfaktoren gilt weder (a) noch (b) aus (2.1.2) im allgemeinen:

zu (a): Sei S isomorph zur speziellen linearen Gruppe $SL(2, 3)$. Dann ist $C_2 \cong \text{Pr}(S, \Phi(S)) \notin Q(S)$.

zu (b): Sei D isomorph zur Diedergruppe D_{18} . Dann ist $\Phi(D) = S(D) = D^{\underline{R}}$, aber $S_3 \cong \text{Pr}(D, S(D)) \cong \text{Pr}(D, \Phi(D)/S(D)) \in \underline{R}$.

In (2.1.4) notieren wir ein Lemma, das eine Fülle von Beispielen für Formationen liefert. Darunter sind bekannte Exemplare wie $\underline{R}$ (vgl. (1.1.1)) oder die Formation der

Gruppen ohne frattinische Hauptfaktoren unterhalb eines Residuums (vgl. (2.4.); zu (2.4.) und zu (2.1.4) sei auf [1] verwiesen). Im Universum $\underline{S}$ führen (bei Notation wie in (2.1.4)) die Klassen $\underline{F}=\underline{A}$ und $\underline{Y}=(1)$ auf die Formation der Gruppen G , deren zentrale Hauptfaktoren unterhalb der Kommutatorgruppe G' komplementierbar sind, und $\underline{F}=\underline{E}$ und $\underline{Y}=\underline{E}\setminus(1)$ ergeben die Formation der Gruppen, deren frattinische Hauptfaktoren zentral sind.

(2.1.4) LEMMA: Seien $\underline{Y}$ eine Klasse, $\underline{F}$ eine Formation, und sei

$$\underline{X} := (G \mid \text{Ist } H/K \text{ ein Hauptfaktor von } G \text{ mit } H \leq G^{\underline{F}} \text{ und } G/C_G(H/K) \in \underline{Y}, \text{ so ist } H/K \text{ nichtfrattinisch}).$$

Dann gelten:

(a) Ist S/T Hauptfaktor einer Gruppe $X \in \underline{X}$ mit $X/C_X(S/T) \in \underline{Y}$, der X -isomorph zu einem Hauptfaktor unterhalb $X^{\underline{F}}$ ist, so ist S/T nichtfrattinisch.

(b) $\underline{X}$ ist eine Formation.

Beweis:

(a) Wir betrachten eine Hauptreihe von X durch $X^{\underline{F}}$. Ist A/B ein Faktor dieser Reihe mit $X/C_X(A/B) \in \underline{Y}$ und $A \leq X^{\underline{F}}$, so ist A/B nichtfrattinisch, und nach Lemma (2.1.2-b) ist A/B nicht X -isomorph zu einem Hauptfaktor oberhalb $X^{\underline{F}}$. Also ist ein Hauptfaktor dieser Hauptreihe mit induzierter Automorphismengruppe in $\underline{Y}$ schon nichtfrattinisch, wenn sein primitiver Gruppentyp als primitiver Gruppentyp eines Haupt-

faktors unterhalb X^F auftritt. Außerdem ist nach der allgemeinen Version des Satzes von Jordan-Hölder [1, 1.4] die Anzahl der nichtfrattinischen Hauptfaktoren eines festen primitiven Gruppentyps in allen Hauptreihen gleich.

(b) Um den φ -Abschluß von $\underline{X}$ zu zeigen, betrachten wir für $X \in \underline{X}$ mit $D \leq X$ einen Hauptfaktor von X/D , der unterhalb $(X/D)^F$ liegt und dessen induzierte Automorphismengruppe in $\underline{Y}$ enthalten ist. Wegen $(X/D)^F = X^F D/D$ tritt der Hauptfaktor in X zwischen D und $X^F D$ auf, weiter ist er X -isomorph zu einem Hauptfaktor unterhalb X^F . Also ist er nach Teil (a) nichtfrattinisch. Damit ist $X/D \in \underline{X}$ gezeigt.

Weil $\underline{X} = Q\underline{X}$ gilt, genügt es, für den R_0 -Abschluß folgendes zu zeigen:

Sind M, N minimale Normalteiler einer Gruppe Y mit $M \cap N = 1$ und $(Y/M, Y/N) \in \underline{X}$, so ist $Y \in \underline{X}$.

Um einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir an, es gibt eine Gruppe Y mit zwei solchen minimalen Normalteilern M, N , aber mit $Y \notin \underline{X}$. Dann gibt es einen Hauptfaktor R/L von Y , für den R im Residuum Y^F liegt und $Y/C_Y(R/L) \in \underline{Y}$ und R/L frattinisch ist. Falls R/L zwischen $M \cap Y^F$ und Y^F liegt, so ist R/L dann Y -isomorph zu einem frattinischen Hauptfaktor oberhalb MN , dies steht in Widerspruch zu $Y/MN \in Q\underline{X} = \underline{X}$. Also gilt $R \notin MN$.

(1) Im Fall $R \leq Y$ und $L=1$ ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R \cap N = 1$ (sonst $R \cap M = 1$), folglich $RN/N \cong_Y R$. Weiter ist $RN/N \leq Y^F N/N = (Y/N)^F$ und $RN/N \leq \Phi(Y)N/N \leq \Phi(Y/N)$, also

ist RN/N frattinischer Hauptfaktor von Y/N unterhalb des $\underline{F}$ -Residuums mit induzierter Automorphismengruppe in $\underline{Y}$, dies ist ein Widerspruch zu $Y/N \in \underline{X}$.

(2) Im Fall $R=MN$ haben wir $MN \leq Y^{\underline{F}}$. Nach der allgemeinen Version des Satzes von Jordan-Hölder [11, 1.4] muß der Abschnitt $MN-N-1$ einer Hauptreihe von Y einen Hauptfaktor Y -isomorph zu R/L haben. Wegen $Y/N \in \underline{X}$ muß dies $N/1$ sein. Aber das führt mit $N \not\leq_Y NM/M$ zu dem Widerspruch, daß NM/M ein frattinischer Hauptfaktor von Y/M unterhalb des $\underline{F}$ -Residuums mit induzierter Automorphismengruppe in $\underline{Y}$ ist, weil $Y/M \in \underline{X}$ gilt.

Also ist $\underline{X}$ eine Formation.

q.e.d.

Ein Hilfsmittel ist der folgende Reduktionsschritt:

(2.1.5) LEMMA: Zu einer Gruppe G gibt es Gruppen $G_1, \dots, G_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ($\Omega := \{1, \dots, n\}$), die Bedingungen (1)-(3) erfüllen:

- (1) $G_i \in \mathcal{M}(G)$ für alle $i \in \Omega$
- (2) $(\text{Pr}(G_i, S(G_i)) \mid i \in \Omega) = (\text{Pr}(G, N) \mid N \triangleleft G)$
- (3) $G \in R_0(G_i \mid i \in \Omega)$

Beweis: Seien $N_1, \dots, N_n$ die sämtlichen minimalen Normalteiler von G und $\Omega = \{1, \dots, n\}$. Zu jedem $i \in \Omega$ sei K_i ein Normalteiler von G , der maximal mit der Eigenschaft $N_i \not\leq K_i$ ist; es bezeichne $G_i := G/K_i$. Für $(G_i \mid i \in \Omega)$ weisen wir die

Bedingungen (1)-(3) nach:

(1) Sei $i \in \Omega$. Dann ist $N_i K_i / K_i \trianglelefteq G / K_i$, und gibt es einen weiteren minimalen Normalteiler M / K_i von G / K_i , so folgt $M \cap N_i \trianglelefteq M \cap N_i K_i \trianglelefteq K_i$, also $M \cap N_i \trianglelefteq K_i \cap N_i = 1$ im Widerspruch zur Maximalität von K_i . Also ist G_i monolithisch, dies gilt für alle $i \in \Omega$.

(2) Wegen $S(G_i) = N_i K_i / K_i$ ist $\text{Pr}(G, N_i) \cong \text{Pr}(G_i, S(G_i))$ für jedes $i \in \Omega$, damit ist (2) gezeigt.

(3) Mit $K := \bigcap_{i \in \Omega} K_i$ gilt $K = 1$, denn sonst enthielte K einen minimalen Normalteiler von G . Folglich ist $G \in \mathcal{R}_0(G_i \mid i \in \Omega)$.

q.e.d.

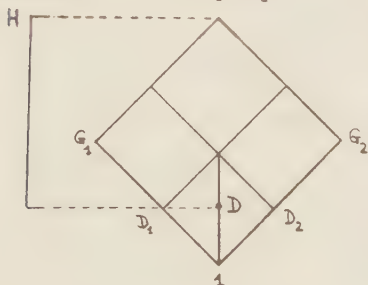
Das nächste Lemma gibt eine Situation an, in der zentrale Produkte dieselbe Formation wie die Ausgangsgruppen liefern:

(2.1.6) LEMMA: Seien G_1 und G_2 auflösbare Gruppen, und sei H zentrales Produkt von G_1 und G_2 .

Dann ist $\text{QR}_0(H) = \text{QR}_0(G_1, G_2)$.

Beweis:

$$G = G_1 \times G_2$$



Nach Voraussetzung ist

$$\text{HeQD}_0(G_1, G_2) \leq \text{QR}_0(G_1, G_2).$$

Für $G := G_1 \times G_2$ ist $H \leq G / D$,

wobei D eine Diagonale

zentraler Normalteiler $D_i \trianglelefteq G_i$

mit $D_i \cong D_2$ ($i=1,2$) ist. Mit

$\underline{F} := \text{QR}_0(H)$ ist

$$D \not\geq G^{\underline{F}} = G_1^{\underline{F}} \times G_2^{\underline{F}} \text{ wegen}$$

$G_1 \in \underline{S}$ nach DOERK, HAWKES [10, 1.2], und $D_0 G_1 = 1$ impliziert $G_1^F = 1$, also $G_1 \in QR_0(H)$. q.e.d.

Die Aussage aus (2.1.6) gilt im Universum $\underline{E}$ für alle Formationen $\underline{F}$, die die Eigenschaft

$$(X \times Y)^{\underline{F}} = X^{\underline{F}} \times Y^{\underline{F}} \quad \text{für alle Gruppen } X, Y \in \underline{F}$$

haben.

2.2. Die minimale sd-Darstellung von $G \in QR_0 \underline{X}$

Im Zusammenhang mit Formationen erweist sich die Theorie der Varietäten als gute Ideenquelle. Diese stammt ursprünglich aus der kombinatorischen Gruppentheorie und weist somit völlig andere Techniken als die Theorie der Klassen endlicher Gruppen auf. Jedoch sind die Varietäten endlicher Gruppen genau die QSD_0 -abgeschlossenen Klassen endlicher Gruppen. Die Verwandtschaft der Abschlußoperatoren QR_0 und QSD_0 legt es nahe, zu untersuchen, welche Resultate sich mit Mitteln unseres Kontextes analog zu Ergebnissen über Varietäten beweisen lassen. Ein Nachteil der konkreten Aussagen der Varietätentheorie ist, daß sie einerseits Tendenzen zum sehr Allgemeinen zeigt, andererseits oft nur sehr spezielle Situationen behandelt sind (vgl. etwa WEICHSEL [26] und [20]). Für die Grundlagen der Theorie der Varietäten sei auf H. NEUMANN [20] verwiesen.

Zur Betrachtung von Gruppen aus $QR_0 \underline{X}$ für eine Klasse $\underline{X}$ ist die folgende Beschreibung durch "minimale sd-Darstellung" ein geeignetes Instrument. Diese Art der Darstellung tritt in KOVACS, NEWMAN [19] für Varietäten endlicher Gruppen auf. Hier bin ich R. BRYCE zu Dank verpflichtet, der vorschlug, zu zeigen, daß sich Analoga für Formationen beweisen lassen und zu einem Kriterium über QR_0 -Frattiniklassen führen (einer schwächeren Form von (5.2.4)).

(2.2.1) SATZ (minimale sd-Darstellung):

Sei $\underline{X}$ ein Homomorph, und sei $G \in \text{QR}_0 \underline{X}$ monolithisch.

(a) Dann gibt es eine endliche Teilklasse $(X_1, \dots, X_m) \subseteq \underline{X}$ ($m \in \mathbb{N}$) und eine subdirekte Untergruppe S von $X = X_1 \times \dots \times X_m$ mit einem Normalteiler T von S , sodaß $G \cong S/T$ gilt.

(b) Ist $(Y_1, \dots, Y_n)$ eine Darstellung von G wie in (a), die minimal bezüglich lexikographischer Ordnung ist, so gelten

(1)-(4) für $i \in \{1, \dots, n\}$:

(1) Y_1 ist monolithisch.

(2) $S(Y_1) \trianglelefteq S$

(3) $S(Y_1) \cap T = 1$

(4) $(S(Y_1) \text{ in } Y_1)$ ist similar zu $(S(G) \text{ in } G)$.

Eine solche Darstellung $(Y_1, \dots, Y_n)$ heiße minimale sd-Darstellung von G in $\underline{X}$.

Für die minimale sd-Darstellung (2.2.1) gelten insbesondere die Aussagen aus (1.2.6), (1.2.7).

Beweis: Aussage (a) ist wohlbekannt, man vergleiche die Vorbemerkung zu (1.2.6) und [3, section 1].

(b) Bezeichnen $\Omega := \{1, \dots, n\}$ und $Y := \prod_{j \in \Omega} Y_j$ und für alle $i \in \Omega$ dann $K_i := \bigcap_{j \in \Omega, j \neq i} Y_j$ den Kern der Projektion π_i von Y auf Y_i , dann ist $Y_i K_i = Y = S K_i$.

(1) Hat Y_j für ein $j \in \Omega$ zwei minimale Normalteiler N_1 und N_2 , so sind $Y_{j_k} := Y_j / N_k \in \text{QX} = \underline{X}$ ($k \in \{1, 2\}$) und Y_j sd $Y_{j_1} \times Y_{j_2}$ mit Projektionen π_{j_k} auf die Komponenten Y_{j_k} .

Jetzt ist $S \leq Y_1 \times \dots \times Y_{j-1} \times Y_j \times Y_{j+1} \times \dots \times Y_n =: \tilde{Y}$, und definieren wir $\hat{\pi}_i$ via

$$y\hat{\pi}_i = \begin{cases} y\pi_i & \text{für } i \neq j \\ (y\pi_j)\pi_{j_k} & \text{für } i=j \text{ und } k \in \{1,2\}, \end{cases}$$

wo $y \in Y$ ist, so ist

$$S\hat{\pi}_{j_k} = (S\pi_j)\pi_{j_k} = Y_j\pi_{j_k} = Y_{j_k} \quad \text{für } k \in \{1,2\}$$

$$\text{und } S\hat{\pi}_i = S\pi_i = Y_i \quad \text{für } i \neq j,$$

also S subdirekt in $\tilde{Y}$.

Nun ist aber $(Y_1, \dots, Y_{j-1}, Y_{j_1}, Y_{j_2}, \dots, Y_n) \leq (Y_1, \dots, Y_n)$ bezüglich lexikographischer Ordnung im Widerspruch zur Minimalität von $(Y_1, \dots, Y_n)$.

Also ist Y_1 monolithisch für alle $i \in \Omega$.

(2) Sei $i \in \Omega$. Wegen $Y_1 \leq Y$ ist $S \cap Y_1 \leq S$ und nach (1.2.6)

$S \cap Y_1 \leq Y_1$. Wäre $S \cap Y_j = 1$ für ein $j \in \Omega$, so wäre

$(Y_1, \dots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \dots, Y_n)$ eine lexikographisch kleinere Darstellung von G . Also enthält für alle $i \in \Omega$ der Normalteiler

$S \cap Y_1$ den Sockel $S(Y_1)$, und (2) gilt.

(3) Sei $i \in \Omega$. Aus $T \leq S$ folgt $T \cap Y_1 \leq S$, also nach (1.2.6)

$$T \cap Y_1 \leq Y_1.$$

Wäre nun $T \cap Y_j \neq 1$ für ein $j \in \Omega$, so gäbe es eine lexikographisch kleinere Darstellung $(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$:

Seien

$$\tilde{Y}_1 := \begin{cases} Y_1 & \text{für } i \neq j \\ Y_j / T \cap Y_j & \text{für } i = j \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{Y} := \prod_{i=1}^n \tilde{Y}_i,$$

entsprechend $\tilde{S} := S / T \cap Y_j \leq \tilde{Y}$ und $\tilde{T} := T / T \cap Y_j \leq \tilde{Y}$ bei natürlicher Identifikation der Untergruppen der direkten Produkte.

Wegen $\underline{X} = Q\underline{X}$ ist $\tilde{Y}_1 \in \underline{X}$ für alle $i \in \Omega$, und wegen $T \cap Y_j \leq S$ ist

$G \cong S/T \cong \tilde{S}/\tilde{T}$. Definieren wir Projektionen $\tilde{\pi}_i$ von $\tilde{Y}$ mit

$\tilde{y} = y(T \cap Y_j) \in \tilde{Y}$ gemäß

$$\tilde{y} \tilde{\pi}_i = \begin{cases} y \pi_i & \text{für } i \neq j \\ y \pi_i(T \cap Y_j) & \text{für } i = j, \end{cases}$$

so ist $\tilde{S} \tilde{\pi}_i = \tilde{Y}_i$ für $i \neq j$ und $\tilde{S} \tilde{\pi}_j = (S \pi_j)/T \cap Y_j = \tilde{Y}_j$, also ist S sd Y .

Damit haben wir den Widerspruch zur Minimalität von $(Y_1, \dots, Y_n)$, und es folgt $S(Y_i) \cap T = 1$ für alle $i \in \mathcal{R}$.

(4) Mit (2) und (3) erfüllt eine minimale sd-Darstellung $(Y_1, \dots, Y_n)$ die Voraussetzungen von (1.2.7). Folglich ist $(S(Y_i) \text{ in } Y_i)$ similar zu $(S(G) \text{ in } G)$ für alle $i \in \mathcal{R}$. q.e.d.

(2.2.2) BEMERKUNG: Die minimale sd-Darstellung von G in $\underline{X}$ ändert sich mit $\underline{X}$ in folgendem Sinn:

(a) Ist G monolithisch und $\underline{X} = Q(G)$, so ist die minimale sd-Darstellung von G in $\underline{X}$ die Gruppe G selbst. Dies ist leicht zu sehen, falls auf (2.2.4) vorgegriffen wird.

(b) Aber sogar für monolithische Gruppen G mit $G \in \underline{X}$ kann die minimale sd-Darstellung von G in $\underline{X}$ von (G) verschieden sein: Ein Beispiel liefern die extraspeziellen Gruppen G und H der Ordnungen p^5 und p^3 respektive des Exponenten $p+2$. Da G zentrales Produkt zweier Kopien von H ist, ist $QR_0(G) = QR_0(H)$ nach (2.1.6), und (H, H) ist minimale sd-Darstellung von G in $Q(G, H)$ für die Formation $QR_0(G)$.

(In diesem Zusammenhang seien (2.3.1), (2.3.3) verglichen.)

Das nächste Lemma beschreibt zwei zusätzliche Eigenschaften

der minimalen sd-Darstellung, sie folgen mit denselben Methoden wie (2.2.1) aus KOVACS, NEWMAN [19, 1.13, 1.14].

(2.2.3) LEMMA: Bezeichnungen und Eigenschaften seien wie in (2.2.1), insbesondere sei G monolithisch mit minimaler sd-Darstellung $(Y_1, \dots, Y_n)$. Dann gelten

$$(a) \ G/S(G) \in QR_0(Y_1/S(Y_1) \mid i \in \{1, \dots, n\})$$

$$(b) \ C_G(S(G)) \in QR_0(C_{Y_1}(S(Y_1)) \mid i \in \{1, \dots, n\}).$$

Beweis: Seien $\mathcal{Q} := \{1, \dots, n\}$ und $R \in \mathcal{S}$ und $C \in \mathcal{S}$ wie in (1.2.7) durch $R/T = S(S/T)$ und $C/T = C_{S/T}(S(S/T))$ definiert.

Sei $i \in \mathcal{Q}$.

(a) Es ist $G/S(G) \cong S/R \cong S/T \ S(Y_i) = S/\bigcap_{j=1}^n (T \ S(Y_j))$ nach (1.2.7), also ist $G/S(G) \in Q(S/P)$, wobei $P := \bigcap_{j=1}^n S(Y_j)$

sei. Bezeichnet $Y := \bigcap_{j=1}^n Y_j$ und wird

$$\bar{Y} := \bigcap_{j=1}^n Y_j/S(Y_j) \text{ mit } Y/P$$

identifiziert, so wird S/P als Untergruppe von Y betrachtet.

Bilden wir Projektionen $\bar{\pi}_i$ für $y \in Y$ und $yP \in \bar{Y}$ via

$$(yP)\bar{\pi}_i := (y\pi_i)P,$$

so folgt aus

$$(S/P)\bar{\pi}_i = (S\pi_i)P/P \cong Y_i P/P \cong Y_i/Y_i \cap P \cong Y_i/S(Y_i),$$

daß S/P subdirekt in Y ist.

Also ist $G \in QR_0(Y_i/S(Y_i) \mid i \in \mathcal{Q})$.

(b) Mit $\hat{Y} := \bigcap_{j=1}^n C_{Y_j}(S(Y_j))$ ist $C = S \cap \bigcap_{j=1}^n C_{Y_j}(S(Y_j)) \leq \hat{Y}$

nach (1.2.7-3), und $C_G(S(G))$ ist Faktorgruppe von C . Es bleibt zu zeigen, daß C subdirekt in $\hat{Y}$ ist.

Sei $y_i \in C_{Y_i}(S(Y_i))$. Da S subdirekt in Y ist, gibt es ein $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ mit $s_i = y_i$. Also ist $s \in K_i C_{Y_i}(S(Y_i)) \cap S = C$ mit (1.2.7-3). q.e.d.

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich zeigen, daß für eine monolithische Gruppe G die von $G/S(G)$ erzeugte Formation stets echt in der von G erzeugten enthalten ist. Schon KOVACS, NEWMAN [19, 1.2, section 4] beweisen, daß G nicht in der von $G/S(G)$ erzeugten Varietät enthalten ist, falls G monolithisch ist. Wegen $QSD_0(G/S(G)) \supseteq QR_0(G/S(G))$ impliziert das sofort $G \notin QR_0(G/S(G))$. Nachdem wir die Techniken für QR_0 aufgebaut haben, können wir wie folgt den Satz aus dem QR_0 -Kontext herleiten (in der Tat läßt sich der Beweis aus [19] auch für Formationen durchführen).

(2.2.4) SATZ (KOVACS, NEWMAN [19, 1.2]): Sei G monolithisch. Dann ist $QR_0(G/S(G)) \subsetneq QR_0(G)$.

Beweis: Um einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir an, es gebe eine monolithische Gruppe G mit $G \in QR_0((Q-1)(G))$.

Sei $\underline{D}$ eine Klasse in $(Q-1)(G)$, die minimal mit den Eigenschaften

$$(1) \quad \underline{D} = Q(\underline{D}) \quad \text{und}$$

$$(2) \quad G \in QR_0(\underline{D}) \text{ ist.}$$

Eine solche Klasse gibt es, da $(Q-1)(G)$ beiden Forderungen genügt. Sei H eine Gruppe maximaler Ordnung aus $\underline{D}$, und sei

$\underline{C} := \underline{D} \setminus (H)$. Dann ist $(Q-1)\underline{D} \subseteq \underline{C} \subseteq Q\underline{D}$, also ist $G \nmid QR_{O\underline{C}}$. Nach (2.2.3-a) ist aber $G/S(G) \in QR_{O\underline{C}}$.

Folglich gilt

$$QR_O(G/S(G)) \subseteq QR_{O\underline{C}} \not\subseteq QR_O(G)$$

im Widerspruch zur Annahme.

Also gilt die Behauptung.

q.e.d.

2.3. Bemerkungen über formationenkritische Gruppen

Ergebnis (2.2.4) demonstriert, daß die monolithischen Gruppen diejenigen sind, die kritisch für Formationen sind. Jedoch wurde der Name "formationenkritisch" für Gruppen G mit der Eigenschaft

$$G \ntriangleleft QR_0((QS-1)(G) \cap QR_0(G))$$

vergeben (vgl. [3, section 1]), dies geschah als Übertragung des Begriffs "kritisch" für endliche Varietäten, dabei heißt G kritisch, falls

$$G \ntriangleleft QSD_0((QS-1)(G))$$

gilt (vgl. [20, 51.31]). Wie eine Varietät von ihren kritischen Gruppen erzeugt wird [20, 51.41], so wird eine Formation von ihren formationenkritischen Gruppen erzeugt [3, section 1]. Da formationenkritische Gruppen insbesondere monolithisch sind, ist dies eine stärkere Aussage als $QR_0 \underline{MF} = \underline{F}$ für eine Formation $\underline{F}$.

Zum Beispiel ist für die extraspeziellen Gruppen G, H der Ordnungen p^5, p^3 und des Exponenten p mit $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ wegen $H \in S(G)$ und $QR_0(G) = QR_0(H)$ also G nicht formationenkritisch (vgl. (2.2.2-b)).

Aber auch für formationenkritische Gruppen X und Y gibt es Beispiele mit $QR_0(X) = QR_0(Y)$, aber $X \neq Y$ (wir verweisen auf (2.5.1)).

Unter Anwendung der minimalen sd-Darstellung ist es möglich, Teile der Arbeit von KOVACS, NEWMAN zu übertragen,

die von kritischen Gruppen handeln ([19, 1.2] in (2.3.1), [19, 1.4] in (2.3.2)).

(2.3.1) SATZ: Sei G monolithisch und nicht formationen-kritisch.

Dann ist $G \in QR_0((S-1)(G))$.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe eine nicht formationenkritische monolithische Gruppe G mit $G \notin QR_0((S-1)(G))$.

Seien $\underline{D}_1 := ((QS-1)(G) \cap QR_0(G))$,

$\underline{D}_2 := (Q(S-1)(G) \cap QR_0(G))$,

dann ist $G \in QR_0 \underline{D}_1$, aber $G \notin QR_0 \underline{D}_2$, und offensichtlich $\underline{D}_2 \subsetneq \underline{D}_1$.

Sei $\underline{D} \subseteq \underline{D}_1$ minimal bezüglich

$$(1) \quad \underline{D} = QSD \cap QR_0 \underline{D}$$

$$(2) \quad G \in QR_0 \underline{D}$$

$$(3) \quad \underline{D}_2 \subseteq \underline{D}.$$

Es gibt solche Klassen, denn $\underline{D}_1$ erfüllt (1)-(3), und $\underline{D} \setminus \underline{D}_2$ ist nicht leer, denn $G \in QR_0 \underline{D} \setminus QR_0 \underline{D}_2$. Sei D Gruppe maximaler Ordnung in $\underline{D} \setminus \underline{D}_2$, und bezeichne $\underline{D}_3 := \underline{D} \setminus (D)$.

Ist $X \in (QS-1)\underline{D} \cap QR_0 \underline{D}$, so ist $X \in \underline{D}_3$, und $\underline{D}_3$ erfüllt (3) und (1). Wegen der Minimalität von $\underline{D}$ kann $\underline{D}_3$ also (2) nicht genügen, das heißt $G \notin QR_0 \underline{D}_3$. Nach (2.2.3-a) ist

$G/S(G) \in QR_0 \underline{D}_3$, denn ist $(Y_1, \dots, Y_n)$ minimale sd-Darstellung von G in $\underline{D}$, so ist $G/S(G) \in QR_0(Y_1/S(Y_1) \mid i \in \{1, \dots, n\})$, und $Y_1/S(Y_1) \in (Q-1)\underline{D} \subseteq \underline{D}_3$. Weiter ist $\underline{D}_1 \setminus \underline{D}_2 \subseteq (Q-1)(G)$ zu beachten. Mit $G/S(G) \in QR_0 \underline{D}_3$ ist $(\underline{D}_1 \setminus \underline{D}_2) \in QR_0 \underline{D}_3$. Aus $\underline{D}_2 \subseteq \underline{D}_3 \subseteq \underline{D}_1$ folgt $QR_0 \underline{D}_3 = QR_0 \underline{D}_1$, also gilt $G \notin QR_0 \underline{D}_1$ im Widerspruch dazu, daß G nicht formationenkritisch ist. Es folgt die Behauptung.

q.e.d.

Satz (2.3.2) steht in Zusammenhang mit (2.3.1) und (2.2.3-a).

(2.3.2) SATZ: Sei G monolithisch, aber nicht formationen-kritisch.

Dann ist $G/S(G) \in \text{QR}_0((S-1)(G/S(G)))$.

Beweis: Mit $\underline{D} := Q(S-1)(G)$ ist $G \in \text{QR}_0 \underline{D}$ nach (2.3.1), also hat G nach (2.2.1) eine minimale sd-Darstellung $(Y_1, \dots, Y_n)$ in $\underline{D}$, und nach (2.2.3-a) ist $\bar{G} := G/S(G) \in \text{QR}_0(Y_1/S(Y_1) \mid i \in \Omega)$ mit $\Omega := \{1, \dots, n\}$. Mit $\underline{C} := (S-1)(\bar{G})$ ist $QSC_n \text{QR}_0 \underline{C} = QSC$, also genügt es, für alle $i \in \Omega$ noch $Y_1/S(Y_1) \in QSC$ zu zeigen.

Sei $i \in \Omega$. Wegen $Y_1 \in \underline{D}$ gibt es Gruppen $K \trianglelefteq H \leq G$ mit $Y_1 \cong H/K$, und es bleiben

$$(1) \ H \ S(G)/S(G) \not\leq \bar{G}$$

$$(2) \ Y_1/S(Y_1) \in Q(H \ S(G)/S(G))$$

zu zeigen.

zu (1): Ist $H \ S(G) = S(G)$, so gibt es wegen $H \leq G$ eine maximale Untergruppe $M < G$ mit $M \geq H$, diese supplementiert $S(G)$.

Wegen $M < G$ ist $S(G) \nsubseteq M$ und folglich $S(G) \nsubseteq \phi(G)$, also ist $\phi(G) = 1$. Nach [19, 1.6] ist G formationenkritisch im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt (1).

zu (2): Es ist $(H \cap S(G))K/K \trianglelefteq H/K$, und mit Similarität (2.2.1-4)

$$\text{ist } |(H \cap S(G))K/K| \leq |S(G)| = |S(H/K)| = |S(Y_1)|,$$

da aber $H/K \cong Y_1$ monolithisch ist, folgt $S(H/K) = (H \cap S(G))K/K$ oder $(H \cap S(G))K = K$. Das impliziert

$$Y_1/S(Y_1) \in Q(H/K/(H \cap S(G))K/K) \leq Q(H/H \cap S(G)) = Q(H \ S(G)/S(G)),$$

also ist (2) gezeigt und die Behauptung bewiesen. q.e.d.

(2.3.3) BEMERKUNG: Sei $\underline{X}$ ein Homomorph und $G \in QR_0 \underline{X}$ mit minimaler sd-Darstellung $(Y_1, \dots, Y_n)$ wie in (2.2.1). Im Unterschied zum entsprechenden Sachverhalt bei Varietäten (vgl. [19, 1.11]) ist Y_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ im allgemeinen nicht formationenkritisch:

Wir ziehen noch einmal das Beispiel der extraspeziellen Gruppen G, H der Ordnungen p^5, p^3 mit Exponent p für $p \neq 2$ heran. Nach (2.2.2-a) ist (G) die einzige minimale sd-Darstellung von G in $Q(G)$ für die Formation $QR_0(G)$, aber wie eingangs (S. 40) bemerkt, ist G nicht formationenkritisch wegen $QR_0(G) = QR_0(H)$.

2.4. Anwendung auf Formationen, primitive Gruppen und nichtfrattinische Hauptfaktoren

Die minimale sd-Darstellung ist dort besonders von Nutzen, wo es sich um primitive Gruppen handelt; dies basiert auf Similaritätsargumenten als Konsequenz von (2.2.1-4).

(2.4.1) LEMMA: Seien $\underline{F}$ und $\underline{H}$ Formationen, und sei G primitiv und monolithisch.

Ist $G \in QR_0(\underline{F}, \underline{H})$, so ist $G \in \underline{F}$ oder $G \in \underline{H}$.

Beweis: In der Formation, die von $\underline{F}$ und $\underline{H}$ erzeugt wird, hat die Gruppe G eine minimale sd-Darstellung $(G_1, \dots, G_n)$ mit $(G_1, \dots, G_j) \in \underline{F}$ und $(G_{j+1}, \dots, G_n) \in \underline{H}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Wegen der Similaritätseigenschaft (2.2.1-4) schließen wir für die primitive, monolithische Gruppe G , daß $G \cong \text{Pr}(G_1, S(G_1))$ in $QR_0 \underline{F} = \underline{F}$ liegt, falls $i \in \{1, \dots, j\}$ ist, und sonst in $QR_0 \underline{H} = \underline{H}$. Dann bedeutet $G \notin \underline{H}$, daß $j=n$ und $G \in \underline{F}$ gelten, wie behauptet. q.e.d.

(2.4.2) BEMERKUNG: Ist eine der Klassen $\underline{F}$ oder $\underline{H}$ keine Formation, so kann ein Schluß wie in (2.4.1) falsch sein, zum Beispiel ist $C_2 \in QR_0(Q(\text{SL}(2,3)), (1))$.

Jedoch gilt die folgende Aussage für ein beliebiges Erzeugendensystem einer Formation:

2.4.3 SATZ: Sei $\underline{X}$ eine Klasse, und sei $\underline{F}$ die Formation, die von $\underline{X}$ erzeugt wird.

Dann tritt jede primitive monolithische Gruppe aus $\underline{F}$ schon als primitiver Gruppentyp eines Hauptfaktors einer Gruppe aus $\underline{X}$ auf.

Beweis: Eine primitive und monolithische Gruppe $G \in \underline{F}$ hat nach (2.2.1) eine minimale sd-Darstellung $(G_1, \dots, G_n) \in \underline{MX}$ mit $(S(G_i) \text{ in } G_i)$ similar zu $(S(G) \text{ in } G)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Das bedeutet, daß G isomorph zu $\text{Pr}(G_i, S(G_i))$ für eine monolithische Faktorgruppe G_i einer Gruppe aus $\underline{X}$ ist, also zum primitiven Gruppentyp eines Hauptfaktors einer Gruppe aus $\underline{X}$. q.e.d.

Der Rest des Abschnittes ist dem Beweis der kleinen, aber nützlichen Beschreibung $\text{QR}_0(G) = R_0(G, \text{QR}_0(G/S(G)))$ für eine primitive Gruppe G gewidmet, die von BLESSENHOHL, BREWSTER in [1] für Gruppen aus $\underline{P}_1$ gegeben wird. Die Schritte (2.4.4) bis (2.4.9) folgen im wesentlichen [1], während die Mittel der sd-Darstellung kürzere und allgemeinere Beweise erlauben. Ausgehend von einer Formation $\underline{Y}$ benutzen wir die Klasse $p(\underline{Y})$ (vgl. [1]):

(2.4.4) DEFINITION: Für eine Formation $\underline{Y}$ sei

$p(\underline{Y}) := (G \mid \text{Ist } H/K \text{ Hauptfaktor von } G \text{ mit } H \leq G^{\underline{Y}}, \text{ so ist } H/K \text{ nicht frattinisch}).$

Nach (2.1.4) ist $p(\underline{Y})$ eine Formation. Betrachten wir eine Gruppe $G \in p(\underline{Y})$, so gehören nach (2.1.2) zu den Hauptfaktoren

oberhalb G^Y primitive Gruppentypen, die paarweise nicht-isomorph zu den primitiven Gruppentypen der Hauptfaktoren unterhalb G^Y sind. (vgl. [1, Lemma 1]). Dies motiviert unter Beachtung von (2.1.3-b) die Einführung der Klasse $p(\underline{Y})$ und damit die Restriktion der Beschreibung auf nichtfrattinische Hauptfaktoren.

(2.4.5) LEMMA: Seien $\underline{F}$ und $\underline{Y}$ Formationen mit $\underline{Y} \in \underline{F} \leq p(\underline{Y})$, und sei $\underline{P}^O := \underline{P} \cap p(\underline{Y}) \setminus \underline{Y}$. Dann ist $\underline{F} = R_O(\underline{Y}, \underline{F} \cap \underline{P}^O)$.

Beweis: Sei $G \in \underline{F}$ minimal mit $G \notin R_O(\underline{Y}, \underline{F} \cap \underline{P}^O)$. Dann ist G monolithisch und nicht in $\underline{Y}$, also ist $S(G)$ nicht frattinisch nach der Definition von $p(\underline{Y})$. Folglich ist G primitive Gruppe in $\underline{P}^O$ im Widerspruch zur Annahme; es gilt (2.4.5).

q.e.d.

Nun können wir das angekündigte Resultat bereits beweisen:

(2.4.6) SATZ: Sei G primitiv und monolithisch. Dann ist $QR_O(G) = R_O(G, QR_O(G/S(G)))$.

Beweis: Seien $\underline{F}$ und $\underline{Y}$ die Formationen, die von G und $G/S(G)$ respektive erzeugt werden. Dann sichert $G \in p(\underline{Y})$ die Bedingung $\underline{Y} \in \underline{F} \leq p(\underline{Y})$. Mit $\underline{P}^O = \underline{P} \cap p(\underline{Y}) \setminus \underline{Y}$ wie in (2.4.5) folgt $\underline{F} = R_O(\underline{Y}, \underline{F} \cap \underline{P}^O)$. Satz (2.4.3) zeigt $\underline{F} \cap \underline{P}^O = (G)$, damit gilt (2.4.6). q.e.d.

Nutzen wir Satz (2.4.3) weiter aus, so ergeben sich Analoga zu [1, Lemma 3 etc.] leicht. Wir verfolgen das Konzept aus [1] weiter, um den (2.4.6) entsprechenden Satz auch für nicht monolithische Gruppen zu erhalten:

(2.4.7) LEMMA: Sei $\underline{Y}$ eine Formation, und sei $\underline{P}^O = \underline{P} \cap \underline{P}(Y) \setminus \underline{Y}$. Sei $\underline{Q} \subseteq \underline{P}^O$ mit $Q(\underline{Q}) \cap \underline{P}^O \subseteq \underline{Q}$. Dann ist $\underline{Q} = QR_O(\underline{Y}, \underline{Q}) \cap \underline{P}^O$.

Beweis: Sei $\underline{F} := QR_O(\underline{Y}, \underline{Q})$, dann ist offensichtlich $\underline{Q} \subseteq \underline{F} \cap \underline{P}^O$. Sei $G \in \underline{F} \cap \underline{P}^O$. Nach (2.4.3) ist $G \cong \text{Pr}(X, H/K)$ für einen Hauptfaktor H/K einer Gruppe $X \in (\underline{Y}, \underline{Q})$.

Ist $X \in \underline{Y}$, so ist $G \in QR_O \underline{Y} = \underline{Y}$ im Widerspruch zu $G \in \underline{P}^O$. Also ist $X \in \underline{Q}$, und folglich $X \in \underline{P}(Y)$. Nach der allgemeinen Version des Satzes von Jordan-Hölder [11, 1.4] können wir annehmen, daß H/K in einer Hauptreihe von X durch das Residuum X^Y auftritt. Wegen $G \not\in \underline{Y}$ muß H/K unterhalb X^Y liegen, also ist H/K nichtfrattinisch. Mit (2.1.2-a) ist nun schon $G \in Q(X)$, und mit $Q(\underline{Q}) \cap \underline{P}^O \subseteq \underline{Q}$ folgt die Behauptung. q.e.d.

Dies läßt sich nun wie in BLESSENHOHL, BREWSTER [1, Satz 2] als Verbandsisomorphismus formulieren, der Beweis folgt unmittelbar aus (2.4.5) und (2.4.7).

(2.4.8) SATZ: Sei $\underline{Y}$ eine Formation, und sei $\underline{P}^0 = \underline{P} \cap p(\underline{Y}) \setminus \underline{Y}$, weiter seien $v(\underline{P}^0)$ der Verband der Teilklassen $\underline{Q}$ von $\underline{P}^0$ mit $Q(\underline{Q}) \cap \underline{P}^0 \subseteq \underline{Q}$ und $w(\underline{Y}, p(\underline{Y}))$ der Verband der Formationen zwischen $\underline{Y}$ und $p(\underline{Y})$.

Es sei eine Abbildung $\varphi: w(\underline{Y}, p(\underline{Y})) \rightarrow v(\underline{P}^0)$ via $\varphi(\underline{F}) = \underline{F} \cap \underline{P}^0$ für $\underline{F} \in w(\underline{Y}, p(\underline{Y}))$ definiert.

Dann ist φ ein Verbandsisomorphismus, insbesondere ist $w(\underline{Y}, p(\underline{Y}))$ ein distributiver Verband.

(2.4.9) KOROLLAR: Seien G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G mit der Eigenschaft, daß sämtliche Hauptfaktoren von G unterhalb N nicht frattinisch sind. Es seien $(X_1, \dots, X_n)$ die primitiven Gruppentypen dieser Hauptfaktoren.

Dann ist $QR_0(G) = R_0(X_1, \dots, X_n, QR_0(G/N))$.

Beweis: Mit $\underline{F} := QR_0(G)$ und $\underline{Y} := QR_0(G/N)$ gelten $G \in p(\underline{Y})$ und $\underline{Y} \subseteq \underline{F} \subseteq p(\underline{Y})$. Nach (2.4.5) folgt $\underline{F} = R_0(\underline{Y}, \underline{Q})$, wobei $\underline{Q} := \underline{F} \cap \underline{P}^0$ und $\underline{P}^0 = \underline{P} \cap p(\underline{Y}) \setminus \underline{Y}$ sind. Es bleibt $\underline{Q} \subseteq (X_1, \dots, X_n)$ zu zeigen.

Sei $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n) \setminus \underline{Y}$. Nach (2.4.5) ist $p(\underline{Y}) = R_0(\underline{Y}, \underline{P}^0)$, und da $Q(G) \cap \underline{P}^0 \subseteq Q(G) \cap \underline{X}$ gilt, ist $G \in R_0(\underline{Y}, \underline{X})$. Zusammen mit $Q(\underline{X}) \cap \underline{P}^0 \subseteq \underline{X} \subseteq \underline{P}^0$ folgt $\underline{Q} = \underline{F} \cap \underline{P}^0 \subseteq QR_0(\underline{Y}, \underline{X}) \cap \underline{P}^0 = \underline{X} \subseteq (X_1, \dots, X_n)$, letzteres gilt nach Anwendung von (2.4.7) auf $\underline{X}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

q.e.d.

(2.4.10) BEMERKUNG: Seien G und H primitive monolithische Gruppen. Dann erzeugen G und H genau dann dieselbe Formation, wenn sie isomorph sind.

Beweis: Gilt $QR_0(G) = QR_0(H)$, so ist insbesondere

$$H \in QR_0(G) = R_0(G, QR_0(G/S(G)))$$

nach (2.4.6). Wieder wegen $QR_0(G) = QR_0(H)$ ist $H \in QR_0(G/S(G))$, und folglich gilt $G \in Q(H)$.

Analog folgt $H \in Q(G)$, insgesamt Isomorphie von G und H .

q.e.d.

2.5. Formationen von p-Gruppen in Beispielen

Satz (2.4.9) demonstriert, daß wir nichtfrattinische Hauptfaktoren im Formationenkontext grundsätzlich behandeln können. Wesentlich schwieriger ist die Wirkung frattinischer Hauptfaktoren auf das QR_0 -Erzeugnis zu kontrollieren. Gegenüber Gruppen mit vielen nichtfrattinischen Hauptfaktoren in (2.4.) betrachten wir in diesem Abschnitt Formationen von p-Gruppen.

Die Beobachtung, daß verschiedene monolithische (sogar formationenkritische) Gruppen dieselbe Formation erzeugen können, manifestiert sich an Beispiel (2.5.1):

(2.5.1) BEISPIEL: Es bezeichnen D_8 die Diedergruppe und Q_8 die Quaternionengruppe der Ordnung 8.

Es gilt $QR_0(D_8) = QR_0(Q_8)$.

Beweis: Es ist bekannt, daß ein zentrales Produkt zweier Kopien von D_8 isomorph zu einem zweier Kopien von Q_8 ist (vgl. [17, Beweis zu III 13.10]). Mit Lemma (2.1.6) folgt daraus Aussage (2.5.1). q.e.d.

Für $p \geq 3$ beschreibt WEICHSEL [26, 5.2] die von einer p-Gruppe der Klasse höchstens 3 erzeugte Varietät. Nutzen wir aus, daß Formationen nilpotenter Gruppen untergruppenabgeschlossen sind [22], so erhalten wir als Korollar eine Charakterisierung der von einer solchen Gruppe erzeugten Formation:

(2.5.2) SATZ (WEICHSEL [26, 5.2]): Sei $p > 3$ eine Primzahl, G und H seien p -Gruppen mit $c(G) \leq 3$ und $c(H) \leq 3$.

Dann sind die Aussagen (1), (2) und (3) gleichwertig:

$$(1) \exp(G^{(i)}) = \exp(H^{(i)}) \quad \text{für } i \in \{0, 1, 2\}$$

$$(2) \text{QSD}_0(G) = \text{QSD}_0(H)$$

$$(3) \text{QR}_0(G) = \text{QR}_0(H)$$

Folglich gilt für $X \in \underline{S}_p$ ($p > 3$) mit $c(X) = n \leq 3$, $\exp(X) = p^a$, $\exp(X') = p^b$, $\exp(X'') = p^c$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$) die Darstellung

$$\text{QR}_0(X) = (G \mid c(G) \leq n, \exp(G) \mid p^a, \exp(G') \mid p^b, \exp(G'') \mid p^c).$$

Als Anwendung von (2.5.2) betrachten wir das folgende Beispiel, auf das wir später zurückgreifen werden:

(2.5.3) BEISPIEL: Sei $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 3\}$, und seien X und Y extraspezielle Gruppen der Ordnung p^3 und der Exponenten p^2 und p respektive. Sei Z isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung p^2 . Nach (2.5.2) gelten

$$\underline{X} := \text{QR}_0(X) = (G \mid c(G) \leq 2, \exp(G) \mid p^2, \exp(G') \mid p),$$

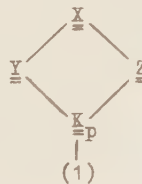
$$\underline{Y} := \text{QR}_0(Y) = (G \mid c(G) \leq 2, \exp(G) \mid p),$$

$$\underline{Z} := \text{QR}_0(Z) = (G \mid c(G) \leq 1, \exp(G) \mid p^2).$$

Wir erhalten den folgenden Verband (bzgl. Formationenerzeugnis und Durchschnitt) von Teilformationen von $\underline{X}$ (Skizze):

Nach (2.5.2) sind Teilformationen

von $\underline{X}$ (mit $G \in \underline{X}$) eindeutig durch die Formationen-



invarianten Klasse, numerische Exponenten der Exponenten von G und G' bestimmt, also hat $\underline{X}$ genau die beiden maximalen Teilformationen $\underline{Y}$ und $\underline{Z}$. Weiter ist $\underline{K}_p$ die einzige nichttriviale Teilformation sowohl von $\underline{Y}$ als auch von $\underline{Z}$.

(2.5.4) BEMERKUNG: Die Anzahl der Isomorphietypen von Gruppen in einem minimalen QR_0 -Erzeugendensystem einer Formation ist nicht eindeutig bestimmt.

Beweis: Mit Notation wie in (2.5.3) ist $QR_0(X) = QR_0(Y, Z)$, und sowohl (X) als auch (Y, Z) sind minimale QR_0 -Erzeugendensysteme von $\underline{X}$. q.e.d.

Eine typische Eigenschaft der Klasse $\underline{S}_p$ ist in folgendem Lemma beschrieben, das später verwendet werden wird. Dabei ist zu beachten, daß die Aussage aus (2.5.5) nicht von der Eigenschaft "elementarabelsch" im besonderen abhängt, sondern vielmehr davon, daß sie eine endliche numerische Invariante für jede p -Gruppe stellt, aber nicht für $\underline{S}_p$ als Ganzes.

Ein Vergleich der Ansätze in (2.5.1)-(2.5.3) und in (2.5.5) weist auf grundsätzliche Unterschiede in der Behandlung endlich erzeugter Formationen und nicht endlich erzeugter Formationen hin.

(2.5.5) LEMMA: Ist $\underline{S}_p = \underline{F} \underset{p}{K}^n$ das Formationenprodukt für eine Formation $\underline{F}$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $\underline{F} = \underline{S}_p$.

Beweis: Der Beweis erfolgt per Induktion über n .

Für $n=1$ sei G eine p -Gruppe, sie hat Ordnung $k:=p^m$ (ein $m \in \mathbb{N}$).

Wir bilden ein reguläres Kranzprodukt von G mit einer Gruppe der Ordnung k , etwa $W := G \wr_T G$. Es bezeichne B die Basisgruppe von W . Nach einem bekannten Satz [21, 4.5] ist die Kommutatorgruppe $W' = G' M$, wobei

$M = \{(g_1, \dots, g_k) \mid g_i \in G \text{ mit } g_1 \cdots g_k \in G'\}$ ist. Bezeichnet $D = \langle (g, \dots, g) \mid g \in G \rangle$ die Hauptdiagonale in B , so ist $D \leq M$ wegen $g^k = 1 \in G'$, und wegen $D \trianglelefteq G$ ist $G \in S(W')$.

Nun ist $W \in \underline{S}_p = \underline{F} \underset{p}{K}$, also $W \underset{p}{K} \in \underline{F}$. Unter Ausnutzung der Untergruppenabgeschlossenheit von Formationen nilpotenter Gruppen (P.M. NEUMANN [22]) folgt

$$G \in S(W') \leq S(S(W \underset{p}{K})) \leq S^2 \underline{F} = \underline{F}.$$

Für den Induktionsschritt wenden wir diese Überlegung auf

$\underline{F} \underset{p}{K}^{n-1}$ anstelle von $\underline{F}$ an. q.e.d.

3. Einiges über gesättigte Formationen

Historisch wurden gesättigte Formationen zunächst im Universum der auflösbaren Gruppen betrachtet, die Erweiterung der Theorie auf das Universum der endlichen Gruppen folgte zunächst den Konzepten der lokalen Formationen einerseits und der Baerlokalen Formationen andererseits (vgl. [12], [13]). Im Zusammenhang der Frattiniklassen werden wir lokale Formationen untersuchen.

In diesem Abschnitt vermerken wir einige Grundlagen und Notationen zu gesättigten Formationen.

3.1. Gesättigte Formationen und lokale Erklärungen

Gesättigte Formationen betrachten wir unter impliziter Verwendung des Satzes von GASCHÜTZ, LUBESEDER, SCHMID [24] vorwiegend durch eine lokale Erklärung, meistens durch die minimale lokale Erklärung x^* in der Form

$$x^*(p) = QR_0(G/S(G) \mid G \in P_1^D \cap \underline{X}) \quad \text{für } p \in \text{char } \underline{X} \quad \text{und } \underline{X} = LF(x^*)$$

(vgl. [13, section 1]) oder durch die volle inklusive, sogenannte kanonische lokale Erklärung $\bar{x}$ mit

$$\bar{x}(p) = \sum_p x^*(p).$$

Insbesondere bezeichnen x^* und $\bar{x}$ in $\underline{X} = LF(x^*) = LF(\bar{x})$ stets die minimale und die kanonische lokale Erklärung von $\underline{X}$ respektive und kennzeichnen $\underline{X}$ als gesättigte Formation.

Die Tatsache, daß in $x^*(p)$ der oben genannten Form nur primitive Gruppen des Typs 1 auftreten, liegt in der Art der Übertragung der Definition der gesättigten Formationen von $\underline{S}$ auf $\underline{E}$ begründet: Auch im Universum endlicher Gruppen werden gesättigte Formationen lokal an den Stellen $p \in \mathbb{P}$ erklärt (vgl. [13, 2]); für primitive Gruppen des Typs 2 gelten daher bekanntlich folgende einfache Zusammenhänge, die wir ohne Referenz verwenden werden:

(3.1.1) LEMMA: Sei $\underline{X} = LF(x^*)$. Dann gelten:

- (a) $\underline{P}_2^D \cap \underline{X} \subseteq x^*(p)$
- (b) $\underline{P}_2^D \cap \underline{X} \subseteq (Q-1)(\underline{P}_1^D \cap \underline{X})$
- (c) $x^*(p) = QR_0((G/S(G) \mid G \in \underline{P}_1^D \cap \underline{X}), (G \mid G \in \underline{P}_2^D \cap \underline{X}))$

Beweis:

Teil (a) folgt sofort aus der Definition gesättigter Formationen, denn jeder Hauptfaktor einer Gruppe in $\underline{X}$ ist x^* -zentral, für $G \in \underline{P}_2^D \cap \underline{X}$ gilt also $G \cong G/C_G(S(G)) \in x^*(p)$.

(b) Zu $G \in \underline{P}_2^D \cap \underline{X}$ gibt es nach (1.3.1-b) eine Gruppe $H \in \underline{P}_1^D$ mit $H/S(H) \cong G$, und mit (a) ist $H \in \underline{S}_p x^*(p) \subseteq \underline{X}$, somit gilt (b).

Teil (c) folgt sofort aus (a) oder (b). q.e.d.

Ein wertvolles Hilfsmittel im Kontext lokaler Erklärungen ist die folgende Eigenschaft (3.1.2). Die Idee, daß es genügt, ein Q -abgeschlossenes Erzeugendensystem der gesättigten Formation $\underline{X}$ anstelle der ganzen Klasse $\underline{X}$ in der lokalen Erklärung x^* zu verwenden, findet sich schon in einer Ar-

beit von COSSEY, OATES-MACDONALD [7, 2.4] für den Fall, daß $\underline{X}$ die gesättigte Formation ist, die von einer auflösbaren Gruppe erzeugt wird.

(3.1.2) SATZ: Sei $\underline{H}$ ein Homomorph, und sei $\underline{X}$ die gesättigte Formation, die von $\underline{H}$ erzeugt wird.

Sei für alle $p \in \mathcal{P}$ eine Formationfunktion f durch

$$f(p) = \text{QR}_0((G/S(G) \mid G \in \underline{P}_1^p \cap \underline{H}), (G \mid G \in \underline{P}_2^p \cap \underline{H}))$$

definiert, und sei $\underline{F} = \text{LF}(f)$.

Dann ist $\underline{X} = \underline{F}$. Insbesondere ist $f(p)$ die minimale lokale Erklärung von $\underline{X}$.

Beweis: Weil $\underline{H}$ in $\underline{X}$ liegt, ist nach (3.1.1-c) $f(p)$ in $x^*(p)$ enthalten, und folglich $\underline{F} = \text{LF}(f) \leq \text{LF}(x^*) = \underline{X}$.

Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir $\underline{H} \leq \underline{F}$: Sei X eine Gruppe kleinster Ordnung in $\underline{H} \setminus \underline{F}$, dann ist $X \in \underline{P}_1 \cup \underline{P}_2$ nach [11, 2.1].

Ist $X \in \underline{P}_1^p \cap \underline{H}$, so ist $X/S(X) \in f(p)$, und mit $f(p) \leq \underline{F}$ folgt $X \in \underline{S}_p f(p) \leq \underline{F}$, ein Widerspruch.

Ist $X \in \underline{P}_2^p \cap \underline{H}$, so folgt ein Widerspruch schon aus $X \in f(p) \leq \underline{F}$ nach Definition von $f(p)$.

Darum liegt $\underline{H}$ in $\underline{F}$, und mit $\underline{X} = \text{SFH} \leq \text{SFF} = \underline{F}$ folgt $\underline{X} = \underline{F}$.

Wegen $\underline{H} \leq \underline{X}$ gilt unter Beachtung von (3.1.1-c) nun $f(p) \leq x^*(p)$, also ist f die minimale lokale Erklärung von $\underline{X}$. q.e.d.

(3.1.3) BEMERKUNG: Der $\underline{Q}$ -Abschluß von $\underline{H}$ ist in (3.1.2)

(Notation wie dort) notwendig, um $\underline{X}=\underline{F}$ zu erhalten:

Gehen wir zum Beispiel von der symmetrischen Gruppe S_3 und der von S_3 erzeugten gesättigten Formation $\underline{X}=\underline{LF}(x^*)$ aus, so ist $x^*(2)=(1)$, aber es ist

$$f(2)=QR_0((G/S(G) \mid G \in \underline{P}_1^2 \cap (S_3)), (G \mid G \in \underline{P}_2^2 \cap (S_3))) = \emptyset.$$

Im Universum auflösbarer Gruppen reduziert sich die lokale Erklärung der Formation $\underline{X}=\underline{LF}(x^*)$ zu

$$x^*(p)=QR_0(G/S(G) \mid G \in \underline{P}_1^p \cap \underline{H})$$

für ein Homomorph $\underline{H}$, das $\underline{X}$ erzeugt, während im Universum endlicher Gruppen primitive Gruppen des Typs 2 unentbehrlich sind, selbst wenn $\underline{H}$ eine Formation ist:

(3.1.4) BEISPIEL: Ist $\underline{H}=\underline{D}_0(1,E)$ mit einer einfachen nicht-abelschen Gruppe E , so ist $\underline{H}$ eine Formation (vgl. (2.4.8)).

Sei $\underline{X}=\underline{LF}(x^*)$ die von $\underline{H}$ erzeugte gesättigte Formation, und sei $h(p)=QR_0(G/S(G) \mid G \in \underline{P}_1^p \cap \underline{H})$. Dann gilt $h(p)=\emptyset$ für alle $p \in \mathbb{P}$, aber es ist $E \in x^*(p)$ für $p \in \pi(E)$ nach (3.1.1-a).

Eine Reduktion auf ein erzeugendes Homomorph entsprechend (3.1.2) ist für die kanonische lokale Erklärung nicht möglich, denn mit $\underline{H}=\underline{QH}$ und $\underline{X}=\underline{SFH}=\underline{LF}(\bar{x})$ ist die Inklusion

$$\bar{x}(p)=QR_0(G/O_p(G) \mid G \in \underline{X}) \supseteq QR_0(G/O_p(G) \mid G \in \underline{H})$$

zum Beispiel für $\underline{X}:=\underline{SF}(C_2)=\underline{S}_2$ und $\underline{H}=(C_2,1)$ echt.

Wird die minimale lokale Erklärung x^* von $\underline{X}=\underline{LF}(x^*)$ in der Gestalt $x^*(p)=\underline{G}/O_{p,p}(G) \mid G \in \underline{X}$ betrachtet, ergibt sich jedoch leicht folgendes Korollar zu (3.1.2):

(3.1.5) KOROLLAR: Sei $\underline{H}$ ein Homomorph, und sei $\underline{X}$ die von $\underline{H}$ erzeugte gesättigte Formation.

Dann gelten für alle $p \in \mathcal{P}$:

- (a) $x^*(p) = QR_0(G/O_p(G) \mid G \in \underline{H})$
- (b) $\bar{x}(p) = \underline{S}_p QR_0(G/O_p(G) \mid G \in \underline{H})$

An einigen Stellen werden wir von gesättigten Formationen mit gesättigten vollen und inklusiven lokalen Erklärungen sprechen. Es ist wohlbekannt, daß die kanonische lokale Erklärung gesättigt ist, sobald irgendeine lokale Erklärung gesättigt ist. Die Umkehrung gilt indes nicht:

(3.1.6) LEMMA: Sei q eine Primzahl, und sei $\underline{H}$ eine gesättigte Formation, die den Bedingungen (1) und (2) genügt:

- (1) $\underline{S}_q \underline{H} = \underline{H}$
- (2) $\underline{Y} := Q(G/O_q(G) \mid G \in \underline{H}) \notin E_q \underline{Y}$

Dann ist $\underline{X} := \underline{S}_q \underline{H}$ eine gesättigte Formation mit kanonischer lokaler Erklärung $\bar{x}$ und minimaler lokaler Erklärung x^* mit den Eigenschaften

- (a) $\bar{x}(p)$ ist für alle $p \in \mathcal{P}$ gesättigt,
- (b) $x^*(q)$ ist nicht gesättigt.

Beweis: Eigenschaften (a) und (b) werden durch Betrachtung lokaler Erklärungen nachgewiesen:

$$\text{Sei } x(p) = \begin{cases} \underline{H} & \text{für } p \neq q \\ \underline{S}_q \underline{H} & \text{für } p = q, \end{cases}$$

dann ist x (volle inklusive) lokale Erklärung von $\underline{X}$, für die $x(p)$ für alle $p \in \mathcal{P}$ gesättigt ist, während die minimale

lokale Erklärung an der Stelle q mit $x^*(q)=Y$ nach Voraussetzung nicht gesättigt ist. q.e.d.

Ein konkretes Beispiel einer Klasse wie in Lemma (3.1.6) ist - bei Notation wie dort - durch $H:=S_2 S_3 K_2$ und $q=2$ gegeben, es führt auf die gesättigte Formation $X=S_2, S_2 S_3 K_2$.

(3.1.7) LEMMA: Sei $X=LF(x^*)$ eine gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* . Sei p eine Primzahl, und es gelten $x^*(p)=(1)$ und $x^*(q) \leq \underline{E}_p$, für alle $q \in \text{char } X$.

Dann ist $X = D_0(\underline{S}_p, X \cap \underline{E}_p)$.

Beweis: Zunächst folgt aus $x^*(p)=(1)$, daß $G \in X$ dann p -nilpotent ist, denn $G/O_{p',p}(G)=1$ heißt, daß $O_p(G)$ normale p' -Hallgruppe von G ist. Um die Normalität einer p -Sylowgruppe P von G nachzuweisen, betrachten wir einen p' -Hauptfaktor H/K von G . Auch $G/C_G(H/K)$ ist p -nilpotent; da aber $x^*(q) \leq \underline{E}_p$, für alle $q \in \text{char } X$ ist, ist $G/C_G(H/K)$ eine p' -Gruppe, und folglich $P \leq C_G(H/K)$. Wegen $(|P|, |H/K|)=1$ folgt $P \leq C_G(O_p(G))$. Also ist $G=P*O_p(G)$. q.e.d.

3.2. Zur Basis einer gesättigten Formation

Die Behandlung von Schunckklassen ist in unserem Kontext darum so übersichtlich, weil sich Probleme auf die Schunckbasis $\underline{\text{PoX}}$ einer Schunckklasse $\underline{X}$ reduzieren lassen (vgl. [25], siehe auch (4.3.1)). Natürlich läßt sich die Schunckbasis einer gesättigten Formation heranziehen, doch weisen Beispiele wie die folgenden darauf hin, daß eine Basis einer gesättigten Formation kleiner sein sollte.

(3.2.1) BEISPIELE:

(1) Zwei Gruppen G und H aus $\underline{P}_1^p$ mit $\text{QR}_O(G/S(G)) = \text{QR}_O(H/S(H))$ erzeugen dieselbe gesättigte Formation nach (3.1.2). Diese Situation tritt mit $G \not\leq \text{PQ}(H)$ und $H \not\leq \text{PQ}(G)$ für die nach Lemma (1.3.1-b) existierenden Gruppen G und H aus $\underline{P}_1^3$ mit $G/S(G) \cong D_8$ und $H/S(H) \cong Q_8$ nach (2.5.1) ein.

(2) Ist zusätzlich zu $G \in \underline{P}_1^p$ noch $\bar{G} := G/S(G) \in \underline{P}_2^p \cup \underline{P}_3^p$, so erzeugt auch $\bar{G}$ dieselbe gesättigte Formation wie G , außerdem alle Erweiterungen $X \in \underline{P}_1^q$ mit $X/S(X) \cong \bar{G}$ für beliebiges $q \in \pi(\bar{G})$, es gilt aber (3.2.2). Als konkretes Beispiel dient die alternierende Gruppe A_5 mit X_r für $r \in \{2, 3, 5\}$ und $X_r \in \underline{P}_1^r$ und $X_r/S(X_r) = A_5$. (Zum Beweis dieser Bemerkungen kann wieder (3.1.2) herangezogen werden.)

(3.2.2) BEMERKUNG: Seien G und H primitive Gruppen des Typs 2. Dann erzeugen G und H genau dann dieselbe gesättigte Formation, wenn sie isomorph sind.

Beweis: Sei $SF(G) = SF(H)$, und p teile $|S(H)|$. Nach (3.1.2) ist dann $H \rtimes x^*(p) \in QR_0(Q(G)) = QR_0(G)$. Aus der Symmetrie in G und H folgt auch $G \in QR_0(H)$, somit Gleichheit der Formationen $QR_0(G)$ und $QR_0(H)$. Nach (2.4.10) impliziert dies Isomorphie von G und H . - Die Umkehrung ist trivial. q.e.d.

In Hinblick auf diese typischen Situationen definieren wir eine Äquivalenzrelation:

(3.2.3) DEFINITION: Zwei Gruppen X und Y heißen äquivalent (kurz: $X \sim Y$), wenn $SF(X) = SF(Y)$ ist. Die zugehörige Äquivalenzklasse sei mit $[X] = \{G \mid G \sim X\}$ bezeichnet.

Um eine gesättigte Formation zu erzeugen, genügt es, sich auf spezielle Äquivalenzklassen zu beschränken, dies erleichtert Beweise über gesättigte Formationen.

(3.2.4) DEFINITION: Sei $\underline{X}$ eine gesättigte Formation, und sei

$$B(\underline{X}) := ([X] \mid (X \in \underline{P}_1^p \cap \underline{X} \text{ und } X/S(X) \in \underline{M} \text{ und } p \nmid \pi(S(X/S(X)))) , \\ p \in \mathbb{P}, \text{ oder } (X \in \underline{P}_2 \cap \underline{X})).$$

Ein Vertretersystem von $B(\underline{X})$ heiße SF-Basis von $\underline{X}$.

Der Einfachheit der Notation halber schreiben wir $SF(B(\underline{X}))$ für das Erzeugnis der Basis und nennen gelegentlich schon $B(\underline{X})$ Basis von $\underline{X}$.

(3.2.5) SATZ: Sei $\underline{X}$ eine gesättigte Formation.

Dann ist $SF(B(\underline{X})) = \underline{X}$.

Beweis: Es habe $SF(B(\underline{X})) =: \underline{B} = LF(b^*)$ minimale lokale Erklärung b^* . Ist $X \in \underline{X} \setminus \underline{B}$ von minimaler Ordnung, so ist $X \in \underline{P}_1 \cup \underline{P}_2$ nach [11, 2.1]. Da $X \in \underline{P}_2$ schon $X \in B(\underline{X})$ implizierte, müssen $X \in \underline{P}_1^p$ für ein $p \in \mathbb{P}$ und $\bar{X} := X/S(X) \in x^*(p)$ gelten. Nach (2.1.5) hat $\bar{X}$ monolithische Faktorgruppen $(X_1, \dots, X_n) \in M(\bar{X}) \subseteq Mx^*(p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (sei $\Omega := \{1, \dots, n\}$), so daß $X \in QR_O(X_i \mid i \in \Omega)$ und $O_p(X_i) = 1$ für alle $i \in \Omega$ gelten. Sei $i \in \Omega$.

Ist $p \notin \pi(S(X_i))$, so betrachten wir eine Gruppe $Y_i \in \underline{P}_1^p \cap \underline{X}$ mit $Y_i/S(Y_i) \cong X_i$, die nach (1.3.1-b) existiert. Diese erfüllt $Y_i \in \underline{S}_p x^*(p) \subseteq \underline{X}$ und $Y_i \in B(\underline{X})$. Folglich haben wir $X_i \in (G/S(G) \mid G \in B(\underline{X}) \cap \underline{P}_1^p) \subseteq b^*(p)$.

Ist $p \in \pi(S(X_i))$, so ist $X_i \in \underline{P}_2 \cap x^*(p) \subseteq \underline{P}_2 \cap \underline{X}$, und somit gelten $X_i \in B(\underline{X})$ und $X_i \in b^*(p)$ nach (3.1.1-c).

Insgesamt ist $\bar{X} \in QR_O(X_i \mid i \in \Omega) \subseteq b^*(p)$, also $X \in \underline{S}_p b^*(p) \subseteq \underline{B}$ im Widerspruch zur Wahl von X .

Darum ist $\underline{X} = \underline{B}$.

q.e.d.

(3.2.6) BEMERKUNGEN:

(1) Ist $\underline{X}$ eine gesättigte Formation, und ist $[X] \in B(\underline{X})$, so folgt aus den Definitionen (3.2.3) und (3.2.4), daß die gesättigte Formation, die von $B(\underline{X}) \setminus [X]$ erzeugt wird, SF-maximal in $\underline{X}$ oder gleich $\underline{X}$ ist (vgl. (3.2.7-1)).

(2) Der Terminus "Basis" von Schunckklassen und gesättigten Formationen ist nicht treffend, denn die SF-Basis einer gesättigten Formation ist keine minimale erzeugende Teilklasse unter SF (vgl. Beispiel (3.2.7)). Entsprechendes gilt für die Schunckbasis einer Schunckklasse $\underline{X}$ wegen der Gruppen in $(\underline{P}_n \underline{X}) \trianglelefteq (Q-1)(\underline{P}_n \underline{X})$.

(3.2.7) BEISPIEL: Für $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 3\}$ seien X und Y extraspezielle Gruppen der Ordnung p^3 und Exponenten p^2 und p respektive, es sei Z isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung p^2 . Seien X^0 , Y^0 , Z^0 primitive Erweiterungen über $\mathbb{F}_2$ gemäß (1.3.1-b) von X , Y , Z respektive und $\underline{X} = \text{SF}(X^0)$.

Dann gelten:

- (1) Für jedes $G \in B(\underline{X})$ ist $\text{SF}(B(\underline{X}) \setminus [G]) = \underline{X}$.
- (2) Insbesondere ist die SF-Basis von $\underline{X}$ kein minimales Erzeugendensystem von $\underline{X}$ unter SF.
- (3) Die Mächtigkeit eines minimalen SF-Erzeugendensystems von $\underline{X}$ ist nicht eindeutig bestimmt.

Beweis: Nach (3.1.2) und (2.5.3) ist

$$x^*(2) = \text{QR}_0(X) = (G \mid c(G) \leq 2, \exp(G) \mid p^2, \exp(G') \mid p)$$

$$x^*(p) = (1)$$

$$x^*(q) = \emptyset \quad \text{für } q \in \mathbb{P} \setminus \{2, p\}$$

für die minimale lokale Erklärung x^* von $\underline{X}$.

Wir bestimmen die SF-Basis von $\underline{X}$: Ist $G \in \mathbb{P}_1^q \cap \underline{X}$, so ist $\bar{G} := G/S(G) \in x^*(q)$, also ist $q \in \{2, p\}$. Weil $\bar{G}$ monolithisch für eine Basisgruppe ist und weil Basisgruppen, die die-

selbe gesättigte Formation erzeugen, in derselben Äquivalenzklasse liegen, erhalten wir unter Beachtung der Möglichkeiten für Teilformationen von $x^*(2)$ nach (2.5.3) jetzt

$$B(\underline{X}) = ([X^0], [Y^0], [Z^0], [C^0], [C_p], [C_2]),$$

wobei C^0 primitive Erweiterung der zyklischen Gruppe C_p in $\underline{P}_1^2$ ist. Da nach dem Beweis von (2.5.4) auch $QR_0(Y, Z) = QR_0(X)$ gilt, ist $SF(Y^0, Z^0) = SF(X^0)$ nach (3.1.2), und daraus folgen die Aussagen (1)-(3). q.e.d.

4. DAS KONZEPT DER FRATTINIKLASSE

4.1. Definition der Frattiniklasse und erste Folgerungen

Die A-Frattiniklasse einer A-abgeschlossenen Klasse $\underline{X}$ besteht aus den Gruppen, die in keiner erzeugenden Teilklasse von $\underline{X}$ notwendig sind:

(4.1.1) DEFINITION: Für $\underline{X} = A\underline{X}$ sei

$$\Phi_A(\underline{X}) := \{G \mid G \in \underline{X}, \text{ Ist } \underline{H} \in \underline{X} \text{ mit } \underline{X} = A(G, \underline{H}), \text{ so ist } \underline{X} = A\underline{H}\}$$

die A-Frattiniklasse von $\underline{X}$.

(4.1.2) BEMERKUNGEN: Die A-Frattiniklasse einer A-abgeschlossenen Klasse $\underline{X}$ ist nach Definition eine Teilklasse von $\underline{X}$.

Insbesondere sind Betrachtungen der A-Frattiniklasse von $\underline{X}$ somit unabhängig von dem zugrundeliegenden Universum.

Wo Verwechslungen ausgeschlossen sind, schreiben wir auch "Frattiniklasse" anstatt "A-Frattiniklasse".

(4.1.3) LEMMA: Sei $\underline{X} = A\underline{X}$. Dann ist

$$\Phi_A(\underline{X}) = \{G \mid G \in \underline{X}, \text{ Ist } \underline{H} = A\underline{H} \in \underline{X} \text{ mit } \underline{X} = A(G, \underline{H}), \text{ so ist } \underline{X} = \underline{H}\}.$$

Beweis:

Sei $\Phi := \{G \mid G \in \underline{X}, \text{ Ist } \underline{H} = A\underline{H} \in \underline{X} \text{ mit } \underline{X} = A(G, \underline{H}), \text{ so ist } \underline{X} = \underline{H}\}$. Ist $X \in \Phi_A(\underline{X})$, so gilt die Implikation "Ist $\underline{X} = A(X, \underline{H})$, so ist $\underline{X} = A\underline{H}$ " insbesondere für A-abgeschlossene Klassen $\underline{H}$, also ist $X \in \Phi$. Ist umgekehrt $X \in \Phi$, so ist für eine Klasse $\underline{H}$ mit

$A(X, \underline{H}) = \underline{X}$ nach Definition von Φ und Abschlußeigenschaft von A schon $\underline{X} = A(X, \underline{H}) = A(X, A\underline{H}) = A\underline{H}$, also $X \in \Phi_A(\underline{X})$. q.e.d.

Nach (4.1.3) genügt es, bei Untersuchungen über die Frattiniklasse $\Phi_A(\underline{X})$ einer A -abgeschlossenen Klasse nur A -abgeschlossene Teilklassen zu betrachten; diese Beobachtung stellt in fast allen Beweisen eine entscheidende Hilfe dar.

Mit der Frattiniuntergruppe teilt die Frattiniklasse nicht nur die Eigenschaft, die Gesamtheit der Nichterzeugenden zu sein, sondern auch die, Durchschnitt der maximalen Teilobjekte zu sein, falls solche überhaupt existieren; dieser Zusammenhang wurde von J. PENSE bemerkt (vgl. [23, 5.20] für Fittingklassen).

(4.1.4) SATZ: Sei $\underline{X}$ eine A -abgeschlossene Klasse. Dann gilt

$$\Phi_A(\underline{X}) = \begin{cases} \cap \{ \underline{H} \mid \underline{H} \text{ A-max } \underline{X} \} & \text{falls A-maximale Teilklassen von } \underline{X} \text{ existieren} \\ \underline{X} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Sei

$$\underline{Y} := \begin{cases} \cap \{ \underline{H} \mid \underline{H} \text{ A-max } \underline{X} \} & \text{falls A-maximale Teilklassen von } \underline{X} \text{ existieren} \\ \underline{X} & \text{sonst;} \end{cases}$$

es ist $\underline{Y} = A\underline{Y}$.

(1) Ist $X \in \Phi_A(\underline{X}) \setminus \underline{Y}$, so ist $\underline{Y} \neq \underline{X}$, und es gibt eine A -maxi-

male Teilklasse $\underline{H}$ von $\underline{X}$ mit $\underline{X} \not\subseteq \underline{H}$. Dann ist $\underline{X} = A(\underline{X}, \underline{H})$, aber $\underline{X} \in \Phi_A(\underline{X})$ führt zu $\underline{X} = \underline{H}$ im Widerspruch zu $\underline{X} \not\subseteq \underline{H}$.

Also gilt die Inklusion $\Phi_A(\underline{X}) \subseteq \underline{Y}$.

(2) Gibt es eine Gruppe $\underline{X} \in \underline{Y} \setminus \Phi_A(\underline{X})$, so gibt es mit (4.1.3) auch eine Klasse $\underline{H} = A\overline{\underline{H}}\overline{\underline{X}}$ mit $A(\underline{X}, \underline{H}) = \underline{X}$. Wir betrachten alle Ketten des Typs

$$(\%) \quad \underline{H} \subseteq \underline{X}_1 \subseteq \underline{X}_2 \subseteq \dots \text{ mit } A\underline{X}_i = \underline{X}_i \not\subseteq \underline{X} \text{ für alle } i \in J,$$

wobei J die Indexmenge von $(\%)$ bezeichnet.

Wir zeigen, daß auch die Vereinigung $\underline{V} := \bigcup_{i \in J} \underline{X}_i$ zu den A -abgeschlossenen Klassen gehört: Sei $\underline{G} \in \underline{AV}$. Wegen der endlichen Abschlußeigenschaft (EA) von A ist $\underline{G} \in A\underline{Z}$ für eine endliche Teilklasse $\underline{Z}$ von $\underline{V}$, und wegen der Endlichkeit von $\underline{Z}$ gibt es einen Index $k \in J$ mit $\underline{Z} \subseteq \underline{X}_k$; also ist $\underline{G} \in \underline{V}$.

Folglich gilt $\underline{H} \subseteq \underline{V} = A\underline{V} \not\subseteq \underline{X}$.

Ist nun $\underline{V} \not\subseteq \underline{X}$ richtig für alle Ketten des Typs $(\%)$, so hat jede Kette eine A -abgeschlossene obere Schranke, die echt in $\underline{X}$ enthalten ist, und nach dem Lemma von Zorn gibt es in $\{\underline{G} \mid \underline{H} \subseteq \underline{G} = A\underline{G} \not\subseteq \underline{X}\}$ ein maximales Element $\underline{L}$, und sicher gilt $\underline{L}$ A -max $\underline{X}$. Damit ist $\underline{Y} \subseteq \underline{L}$. Aber wegen $A(\underline{X}, \underline{H}) = \underline{X}$ ist $\underline{X} \not\subseteq \underline{L}$ im Widerspruch zu $\underline{X} \in \underline{Y}$.

Also gibt es eine Kette des Typs $(\%)$ mit $\underline{V} = \underline{X}$. Das jedoch impliziert $\underline{X} \in \underline{X}_j$ für ein $j \in J$ und damit $A(\underline{X}, \underline{H}) = \underline{X}_j$ im Widerspruch zu $A(\underline{X}, \underline{H}) = \underline{X} \not\subseteq \underline{X}_j$.

Folglich gilt auch die Inklusion $\underline{Y} \subseteq \Phi_A(\underline{X})$, und insgesamt ist die Behauptung nachgewiesen. q.e.d.

Die Beschreibung (4.1.4) impliziert, daß die A-Frattini-
klasse von $\underline{X} = A\underline{X}$ eine A-Teilklasse von $\underline{X}$ ist:

(4.1.5) FOLGERUNG: Sei $\underline{X}$ eine A-abgeschlossene Klasse.
Dann ist $A \Phi_A(\underline{X}) = \Phi_A(\underline{X})$.

Für unsere Fragestellung ist (4.1.5) insofern nützlich,
als auch für die Frattiniklasse $\Phi_A(\underline{X})$ Eigenschaften des
A-Abschlusses verwendet werden können. Darüber tragen
Frattiniklassen nach (4.1.5) zu Beispielen etwa zu Forma-
tionen und gesättigten Formationen bei. Durch Betrachtung
des Frattinikonzpts ergeben sich Einblicke in die Zusam-
menhänge zwischen verschiedenen Typen von Klassen (vgl. (6)).

Mit (4.2.6), (5.1.1) und (4.1.6) dokumentieren wir, daß
beide Fälle in (4.1.4) eintreten:

(4.1.6) BEISPIEL: Sei A einer der Abschlußoperatoren S,
 S_n , Q, R_0 , N_0 , D_0 , E_ϕ , PQ oder ein Erzeugnis aus jenen,
und sei $\underline{X} = A(G)$ die A-Klasse, die von der Gruppe $G \neq 1$ erzeugt
wird. Dann kann G in der erzeugenden Klasse (G) nicht aus-
gelassen werden, also ist G nicht in der A-Frattiniklasse
von $\underline{X}$ enthalten, und $\Phi_A(\underline{X}) \neq \underline{X}$ gilt. - Ein zweiter Beweis
folgt aus BRYANT, BRYCE, HARTLEY [3, 1.2, 1.3], wenn G
auflösbar und $A = QR_0$ oder $A = SF$ sind: Weil die (gesättigte)
Formation, die von einer auflösbaren Gruppe erzeugt wird,
nur endlich viele (gesättigte) Teilformationen hat, muß
es maximale geben, und nach (4.1.4) ist $\Phi_A(\underline{X})$ nicht trivial.

Läßt sich umgekehrt $\Phi_A(\underline{X})=\underline{X}$ für eine A-abgeschlossene Klasse $\underline{X}$ zeigen, so ist damit nachgewiesen, daß $\underline{X}$ keine A-maximalen Teilklassen hat.

4.2. Beispiele zu Frattiniklassen mit einfachen Operatoren

Dieser Abschnitt soll einerseits einen kurzen Überblick über das Verhältnis der A-Frattiniklasse zur Ausgangsklasse $\underline{X}$ geben, wenn A ein leicht überschaubarer Operator ist, und andererseits in den Umgang mit dem Frattiniklassenkonzept einführen.

Besonders einfach sind Operatoren zu behandeln, die die endliche Abschlußeigenschaft (EA) wie folgt erfüllen:

(4.2.1) DEFINITION: Ein Abschlußoperator A mit (EA1) heiße unar:

(EA1) Ist $G \in \underline{AX}$, so ist $G \in A(H)$ für eine Gruppe $H \in \underline{X}$.

Man überlegt sich leicht, daß dies genau die Bedingung ist, die CARTER, FISCHER, HAWKES in [6] als "unary" bezeichnen ($\underline{AX} = \cup \{A(G) \mid G \in \underline{X}\}$ für alle $\underline{X}$), und daß mit A und B auch $\{A, B\}$ unar ist. Beispiele unarer Operatoren sind nach bekannten Eigenschaften Q, S, S_n , E_ϕ , $E_\phi Q$, PQ, nicht aber D_0 , R_0 , N_0 , QR_0 , SF.

Wir definieren eine weitere Eigenschaft:

(4.2.2) DEFINITION: Ein Abschlußoperator A heiße ordnend, wenn für alle Gruppen G und H mit $G \not\leq H$ höchstens eine der Aussagen $G \in A(H)$ oder $H \in A(G)$ gilt.

Dies ist etwa erfüllt, wenn A ordnungserweiternd (4.2.3) ist - zum Beispiel D_0 , R_0 , N_0 , E_ϕ - oder ordnungsvermindernd (im entsprechenden Sinn) - zum Beispiel Q , S , S_n . Für Q , S , S_n bevorzugen wir aus Demonstrationsgründen den Beweis in (4.2.5-a). Für unäre ordnende Operatoren gilt offensichtlich $A(A-1)\underline{X} = (A-1)\underline{X}$ für beliebige (also nicht nur für A -abgeschlossene) Klassen $\underline{X}$ (vgl. (1.1.1)).

(4.2.3) DEFINITION: Ein Abschlußoperator A mit (OE) heiße ordnungserweiternd:

(OE) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } G \in A\underline{X} \text{ fur eine endliche Klasse } \underline{X}, \text{ aber } G \notin A(\underline{X} \setminus \{X\}) \\ \text{fur jedes } X \in \underline{X}, \text{ so ist } |G| \geq |X| \text{ fur alle } X \in \underline{X}, \text{ und} \\ \text{Gleichheit der Ordnungen gilt nur bei trivialer} \\ \text{Darstellung.} \end{array} \right.$

Offensichtlich ist die Klasse $\Phi_A(\underline{X})$ der Nichterzeugenden stets in der Klasse $(A-1)\underline{X}$ der nichttrivial dargestellten Gruppen enthalten, die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht:

(4.2.4) BEISPIEL: Ist $\underline{X}$ die Klasse der zyklischen p -Gruppen fur ein $p \in \mathbb{P}$, so ist $\underline{X} = E_\phi Q \underline{X} = (E_\phi Q - 1)\underline{X}$, aber $\Phi_{E_\phi Q}(\underline{X}) = \{1\}$.

Beweis: Fur jede zyklische p -Gruppe $G \neq 1$ ist $E_\phi \omega(G) = \underline{X}$, daraus folgen samtliche Behauptungen. q.e.d.

Auf jeden der Abschlußoperatoren Q , S , S_n , D_0 , R_0 , N_0 , E_ϕ trifft Satz (4.2.5) zu:

(4.2.5) SATZ: Seien A ein Abschlußoperator mit Eigenschaft

(1) oder (2) und $\underline{X}$ eine A -abgeschlossene Klasse:

(1) A ist unar und ordnend.

(2) A ist ordnungserweiternd.

Dann ist $\Phi_A(\underline{X}) = (A-1)\underline{X}$.

Beweis: Mit der Bemerkung vor (4.2.4) bleibt $(A-1)\underline{X} \subseteq \Phi_A(\underline{X})$ zu zeigen. Sei $G \in (A-1)\underline{X}$.

(1) Weil A unar und ordnend ist, gibt es ein $H \in \underline{X}$ mit $G \in A(H)$, aber $H \notin A(G)$. Sei $\underline{H} = A\underline{H}$ mit $A(G, \underline{H}) = \underline{X}$. Für $H \in \underline{X}$ findet sich ein $K \in (G, \underline{H})$ mit $H \in A(K)$. Da $H \notin A(G)$ gilt, ist $K \in \underline{H}$. Daraus folgt $H \in A\underline{H} = \underline{H}$ und damit $\underline{X} = A(G, \underline{H}) \subseteq A(H, \underline{H}) \subseteq A\underline{H}$, also $\underline{X} = \underline{H}$. Es ist somit $G \in \Phi_A(\underline{X})$.

(2) Wegen $G \in (A-1)\underline{X}$ gibt es eine endliche Klasse $\underline{Y} \in \underline{X}$, für die $G \in A\underline{Y}$, aber $G \notin A(\underline{Y} \setminus \{Y\})$ und $G \notin \underline{Y}$ für alle $Y \in \underline{Y}$ gelten. Da A ordnungserweiternd ist, ist also $|G| > |Y|$ für alle $Y \in \underline{Y}$.

Sei $\underline{H} = A\underline{H}$ mit $A(G, \underline{H}) = \underline{X}$. Dann gibt es zu jeder Gruppe $Y \in \underline{Y}$ eine endliche Klasse $\underline{Z} \in (G, \underline{H})$ mit $Y \in A\underline{Z}$, aber $Y \notin A(\underline{Z} \setminus \{Z\})$ für alle $Z \in \underline{Z}$, also mit $|Y| > |Z|$, weil A ordnungserweiternd ist. Folglich ist $G \notin \underline{Z}$ für alle $Z \in \underline{Z}$, das heißt $\underline{Z} \in \underline{H}$ und somit $Y \in A\underline{H} = \underline{H}$. Es folgt $\underline{Y} \in \underline{H}$, und daraus $G \in A\underline{Y} \subseteq A\underline{H} = \underline{H}$, also $G \in \Phi_A(\underline{X})$. q.e.d.

Betrachtet als Operator erhält das Bilden der Frattini-Klasse nicht die Inklusion der Abschlußoperatoren im allgemeinen:

(4.2.6) BEISPIEL: Ist $A \in \{Q, S, S_n\}$, so hat nach (4.2.5) eine A-abgeschlossene Klasse $\underline{X}$ Frattiniklasse $(A-1)\underline{X}$. Ist nun B einer der Operatoren $SF, PQ, QR_0, \{N_0, S_n\}$ und ist $\underline{X}$ zusätzlich B-abgeschlossen und in $\underline{S}$ enthalten, so folgt $(A-1)\underline{X} = \underline{X}$ aus dem D_0 -Abschluß von $\underline{X}$, also ist $X = \Phi_A(\underline{X})$.

Insbesondere liefert dies ein Beispiel zweier Abschlußoperatoren A und B mit $A \leq B$ und $\Phi_A(\underline{X}) \neq \Phi_B(\underline{X})$ für geeignete Klassen $\underline{X}$.

Für $\underline{X} = \underline{S}_p$ ist $\Phi_Q(\underline{S}_p) = \underline{S}_p$, aber $\Phi_{PQ}(\underline{S}_p) = (1)$ (letzteres folgt nach Definition aus der Tatsache, daß jede p-Gruppe ($\neq 1$) unter PQ ganz $\underline{S}_p$ erzeugt), hier ist die Inklusion echt.

Ein Beispiel für $A \leq B$ und $\Phi_A(\underline{X}) \neq \Phi_B(\underline{X})$ wird in (6.3.1) gegeben werden.

Ob das Bilden der A-Frattiniklasse zu festem A als Operator die Inklusion A-abgeschlossener Klassen erhält, wissen wir nicht. Für Operatoren mit Eigenschaft (1) oder (2) aus (4.2.5) gilt, falls $\underline{X} \leq \underline{Y}$ ist, auch $\Phi_A(\underline{X}) = (A-1)\underline{X} \leq (A-1)\underline{Y} = \Phi_A(\underline{Y})$. Bei der Behandlung von Formationen werden wir sehen, daß die Inklusion jedenfalls im allgemeinen nicht streng monoton ist (vgl. (5.1.5)).

Der entscheidende Punkt läßt sich wie folgt formulieren:

(4.2.7) LEMMA: Sei A ein Abschlußoperator, und $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ seien A-abgeschlossene Klassen mit $\underline{X} \leq \underline{Y}$. Jede A-maximale Klasse von $\underline{Y}$ enthalte eine A-maximale Klasse von $\underline{X}$. Dann gilt $\Phi_A(\underline{X}) \leq \Phi_A(\underline{Y})$.

Beweis: Gibt es keine A-maximalen Teilklassen von $\underline{Y}$, so ist $\Phi_A(\underline{Y}) = \underline{Y}$, und die Behauptung ist trivial. Andernfalls bezeichne zu $\underline{H} \text{ A-max } \underline{Y}$ dann $\underline{L}(\underline{H})$ die nach Voraussetzung existierende Klasse mit $\underline{L}(\underline{H}) \leq \underline{H}$ und $\underline{L}(\underline{H}) \text{ A-max } \underline{X}$. Mit (4.1.4) folgt

$$\begin{aligned} \Phi_A(\underline{Y}) &= \cap \{ \underline{H} \mid \underline{H} \text{ A-max } \underline{Y} \} \supseteq \cap \{ \underline{L}(\underline{H}) \mid \underline{H} \text{ A-max } \underline{Y} \} \supseteq \cap \{ \underline{L} \mid \underline{L} \text{ A-max } \underline{X} \} \\ &= \Phi_A(\underline{X}). \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Der nächste Satz (4.2.8) nennt spezielle Situationen, in denen Inklusion der Klassen auch Inklusion der zugehörigen Frattiniklassen impliziert: Ist eine (gesättigte) Formation direktes Produkt disjunkter (gesättigter) Teilformationen, so vererbt sich diese Zusammensetzung auf die Frattiniklasse.

(4.2.8) SATZ: Für $A \in \{QR_0, SF\}$ seien A-abgeschlossene Klassen $\underline{X}$, $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$ mit $\underline{X} = D_0(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ und $\underline{X}_1 \cap \underline{X}_2 = (1)$ gegeben. Dann ist $\Phi_A(\underline{X}) = D_0(\Phi_A(\underline{X}_1), \Phi_A(\underline{X}_2))$.

Beweis: Es bezeichnen $\{i, j\} = \{1, 2\}$ sowie $\Phi := \Phi_A(\underline{X})$ und $\Phi_i := \Phi_A(\underline{X}_i)$.

(1) Zunächst zeigen wir, daß für ein Homomorph $\underline{H}$ aus $A\overline{H} = \underline{X}$ stets $A(\underline{H} \cap \underline{X}_1) = \underline{X}_1$ folgt:

Sei $A = QR_0$, und sei also $\underline{H}$ ein Homomorph mit $QR_0 \overline{H} = \underline{X}$. Eine monolithische Gruppe $Y \in \underline{X}_1$ hat eine minimale sd-Darstellung $(Y_1, \dots, Y_n) \leq M\overline{H}$. Da $\text{Pr}(Y, S(Y)) \cong \text{Pr}(Y_t, S(Y_t))$ für alle $t \in \{1, \dots, n\}$ gilt, ist $\text{Pr}(Y_t, S(Y_t)) \in QR_0 \overline{X}_1 = \underline{X}_1$.

Wegen $\underline{X}_1 \wedge \underline{X}_2 = (1)$ folgt daraus $Y_t \notin \underline{X}_j$, und da Y_t monolithisch ist, impliziert $Y_t \in D_0(\underline{X}_1, \underline{X}_2) \setminus \underline{X}_j$ schon $Y_t \in \underline{X}_1$ (für alle $t \in \{1, \dots, n\}$).

Also ist Behauptung (1) für $A = QR_0$ nachgewiesen.

Sei nun $A = SF$, und sei $\underline{H}$ ein Homomorph mit $SF\underline{H} = \underline{X}$. Mit $\pi_i := \text{char } \underline{X}_i$ ist $\pi_1 \wedge \pi_2 = \emptyset$ äquivalent zu $\underline{X}_1 \wedge \underline{X}_2 = (1)$, weil $\pi_i = \{p \mid C_p \in \underline{X}_i\}$ für die gesättigte Formation $\underline{X}_i$ gilt. Sind x^* , x_i^* minimale lokale Erklärungen von $\underline{X}$, $\underline{X}_i$ re-spektive und $p \in \pi_i$, so ist folglich $x_j^*(p) = \emptyset$, und mit (3.1.2) folgt

$$\begin{aligned} x_i^*(p) &= x^*(p) = QR_0((G/S(G) \mid G \in P_1^D \wedge \underline{H}), (G \mid G \in P_2^D \wedge \underline{H})) \\ &= QR_0((G/S(G) \mid G \in P_1^D \wedge \underline{H} \wedge \underline{X}_1), (G \mid G \in P_2^D \wedge \underline{H} \wedge \underline{X}_1)), \end{aligned}$$

und letzteres ist die minimale lokale Erklärung der von $\underline{H} \wedge \underline{X}_i$ erzeugten Formation.

Damit gilt Behauptung (1) auch für $A = SF$.

(2) Um $\Phi_i \subseteq \Phi$ zu zeigen, seien $X \in \Phi_i$ und $\underline{Y} = A\underline{Y}$ mit $A(X, \underline{Y}) = \underline{X}$. Nach (1) ist $A(Q(X, \underline{Y}) \wedge \underline{X}_k) = \underline{X}_k$ für $k=1, 2$. Es folgt $\underline{X}_k = \underline{Y} \wedge \underline{X}_k$ wegen $X \in \Phi_i$ für $k=i$ und wegen $\underline{X}_1 \wedge \underline{X}_2 = (1)$ für $k=j$. Also ist $\underline{X} = \underline{Y}$, und das impliziert $X \in \Phi$. Folglich ist $\Phi_i \subseteq \Phi$ gezeigt.

(3) Ist $X \in \Phi$, so ist $X \in D_0(X_1, X_2)$ für geeignete Gruppen $X_k \in \underline{X}_k$ ($k=1, 2$). Es gilt sogar $X_k \in \Phi_k$: Sei $\underline{H}_1$ eine A -abgeschlossene Klasse mit $A(X_1, \underline{H}_1) = \underline{X}_1$. Unter Beachtung von $X_i \in Q(X) \subseteq \Phi$ folgt $\underline{X} = A(\underline{H}_1, \underline{X}_j)$, und mit (1)

schließlich $\underline{X}_i = \underline{H}_i$.

Also gilt $X_k \in \Phi_k$ für $k=1,2$, und damit ist die Inklusion

$\Phi \subseteq D_0(\Phi_1, \Phi_2)$ gezeigt. q.e.d.

An dieser Stelle erhebt sich die Frage nach einer Beschreibung der (gesättigten) Formationen $\underline{X}$, die von der Gestalt $\underline{X} = D_0(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ mit (gesättigten) Formationen $\underline{X}_1, \underline{X}_2$ sind, wobei nicht $\underline{X}_1 \subseteq \underline{X}_2$ oder $\underline{X}_2 \subseteq \underline{X}_1$ gilt und nicht $\underline{X}_1 \wedge \underline{X}_2 = (1)$ vorausgesetzt wird.

4.3. PQ-Frattiniklassen

Die PQ-Frattiniklasse (Schunck-Frattiniklasse) einer Schunckklasse ist nach Definition die Schunckklasse der Nichterzeugenden unter dem Operator PQ. Für Schunckklassen wurde das Problem der Bestimmung der Frattiniklassen im Prinzip schon in der Arbeit [25] von Schunck gelöst, denn eine Schunckklasse $\underline{X}$ ist durch die primitiven Gruppen determiniert, die sie enthält (Schunckbasis, vgl. (3.2.)). In der Terminologie der Frattiniklassen heißt das, daß nichttriviale epimorphe Bilder von Gruppen aus der Schunckbasis, die selbst Basisgruppen sind, die Schunck-Frattiniklasse erzeugen. Den einfachen Beweis notieren wir, weil er typisch für die Bestimmung einer Frattiniklasse ist.

(4.3.1) SATZ: Sei $\underline{X}$ eine Schunckklasse, und sei

$$\underline{Z} := \underline{P} \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}).$$

Dann ist $\Phi_{PQ}(\underline{X}) = PQ(\underline{Z})$.

Beweis:

(1) Sei $G \in \underline{Z}$, und sei $H \in \underline{X} \cap \underline{P}$ mit $G \in (Q-1)(H)$. Ist $\underline{H}$ eine Schunckklasse mit $\underline{X} = PQ(G, \underline{H})$, so muß H in der Schunckbasis $\underline{H} \cap \underline{P}$ liegen, und folglich sind $G \in Q\underline{H} = \underline{H}$ und $\underline{H} = \underline{X}$ gezeigt. Also ist G in der PQ-Frattiniklasse enthalten.

(2) Ist umgekehrt $G \in \Phi_{PQ}(\underline{X}) \cap \underline{P}$, so gibt es wegen

$\Phi_{PQ}(\underline{X}) \leq (PQ-1)\underline{X}$ eine Gruppe $H \in \underline{X} \cap \underline{P}$ mit $G \in (Q-1)(H)$, da G

selbst primitiv ist, also mit $G \in \underline{Z}$.

q.e.d.

Als Anwendung erhalten wir Satz (4.3.2):

(4.3.2) SATZ: Sei $\underline{F}$ eine Formation auflösbarer Gruppen, und sei $\underline{X} = \underline{NF}$.

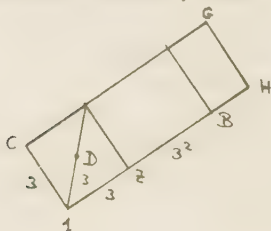
Dann ist $\Phi_{PQ}(\underline{X}) = E_{\phi} \underline{F}$.

Beweis: Einerseits gilt $(Q-1)(\underline{NF} \cap \underline{P}) \subseteq \underline{F}$, denn für $X \in \underline{X} \cap \underline{P}$ ist $F(X) = S(X)$, also $X/S(X) \in \underline{F}$. Andererseits liegt $\underline{F} \cap \underline{P}$ in $\underline{Z}$ bei Notation wie in (4.3.1), denn zu $G \in \underline{F} \cap \underline{P}$ existiert nach (1.3.1-b) eine Gruppe $H \in \underline{P}$ mit $H/S(H) \cong G$ und $H \in \underline{NF}$.

Also ist $\underline{Z} = \underline{F} \cap \underline{P}$, und $PQ\underline{Z} = E_{\phi} \underline{F}$ die Schunck-Frattiniklasse von $\underline{NF}$ nach (4.3.1). q.e.d.

Eine Schunckklasse der Gestalt $E_{\phi} \underline{F}$ mit $\underline{F} = QR_O \underline{F}$ ist im allgemeinen keine Formation, wie ein einfaches Beispiel zeigt:

(4.3.3) BEISPIEL: Sei $\underline{F}$ die von der symmetrischen Gruppe S_3 erzeugte Formation. Ist B isomorph zu der extraspeziellen Gruppe der Ordnung 3^3 und des Exponenten 3, so hat B einen Automorphismus α der Ordnung 2, der $B/\Phi(B)$ invertiert und $\Phi(B) = Z(B)$ zentralisiert. Sei $U = \langle \alpha \rangle$, und sei $H = [B]U$ semidirektes Produkt, dann ist $H \in E_{\phi} \underline{F}$.



Sei C isomorph zur zyklischen Gruppe C_3 , sei $G = H \times C$. Für $Z := Z(H)$ bezeichne D eine Diagonale in $C \times Z$.

Dann ist $G/D \cong G/C$ mit $D \cap C = 1$, also $G \in R_0(H) \subseteq R_0 E_{\phi} \underline{F}$.

Aber es ist $G \notin E_{\phi} \underline{F}$, denn C liegt nicht in $\underline{F}$.

Für die Klasse $\underline{N}^n$ der Gruppen nilpotenter Länge höchstens n erhalten wir die zugehörige Schunck-Frattiniklasse als Korollar zu (4.3.2):

(4.3.4) <u>KOROLLAR:</u> $\Phi_{PQ}(\underline{N}^n) = \underline{N}^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
--

5. QR₀-FRATTINIKLASSEN

Eine zentrale Stellung in unserer Arbeit hat die Untersuchung der QR₀-Frattiniklasse einer Formation, insbesondere die Frage nach der Existenz maximaler Teilformationen. In engem Zusammenhang steht das Problem der Bestimmung des Erzeugnisses einer Klasse unter dem Abschlußoperator QR₀, das bereits in Teil (2.) behandelt wurde, soweit es von dem Frattiniklassenkontext unabhängig ist, und auch bei Konstruktionen in Beispielen und Beweisen wieder relevant werden wird.

5.1. Einige Beispiele zu QR₀-Frattiniklassen

Wie schon in (4.1.6) bemerkt, hat die von einer Gruppe erzeugte Formation stets maximale Subformationen [3]. Mit der Klasse $\underline{S}_p$ der p-Gruppen nennen wir ein Beispiel einer Formation ohne maximale Teilformationen:

$$(5.1.1) \quad \underline{\text{SATZ:}} \quad \Phi_{QR_0}(\underline{S}_p) = \underline{S}_p$$

Beweis: Seien G eine p-Gruppe und $\underline{F}$ eine Formation mit $QR_0(G, \underline{F}) = \underline{S}_p$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so bestimmt, daß $G \in \underline{K}_p^n$ gilt. Dann ist einerseits $\underline{K}_p^n$ in dem Formationenprodukt $\underline{F} \underline{K}_p^{11}$ enthalten, andererseits liegt $\underline{F}$ in $\underline{F} \underline{K}_p^n$ wegen des Untergruppenabschlusses von $\underline{F} \in \underline{N}$ nach [22]. Insgesamt führt

$$\underline{S}_p = QR_0(G, \underline{F}) \subseteq \underline{F} \underline{K}_p^n \subseteq \underline{S}_p$$

auf $\underline{\underline{S}}_p = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{K}}_p^n$, und nach (2.5.4) muß $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{S}}_p$ gelten.

Folglich ist $G \in \Phi_{QR_0}(\underline{\underline{S}}_p)$ nach Definition der QR_0 -Frattiniklasse. q.e.d.

Es ist zu beachten, daß der Beweis von (5.1.1) sehr stark auf den Eigenschaften basiert, die schon in (2.5.5) benutzt wurden, also darauf, daß sich $\underline{\underline{S}}_p$ als Ganzes nicht durch endliche Produkte von $\underline{\underline{K}}_p$ ausschöpfen läßt und daß Formationen nilpotenter Gruppen untergruppenabgeschlossen sind. Somit läßt sich die Argumentation nicht auf Klassen, die über $\underline{\underline{N}}$ hinausgehen, übertragen.

In (5.3.) werden wir einen Typ gesättigter Formationen beschreiben, der keine maximalen Teilformationen zuläßt. Eine gesättigte Formation mit maximalen Teilformationen kennen wir nicht. Andererseits ist Sättigung der Formation $\underline{\underline{X}}$ keine notwendige Voraussetzung für $\Phi_{QR_0}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{X}}$, wie das Beispiel der Klasse der abelschen p -Gruppen zeigt:

(5.1.2) SATZ: $\Phi_{QR_0}(\underline{\underline{A}}_p) = \underline{\underline{A}}_p$

Beweis: Sei $G \in \underline{\underline{A}}_p \setminus \Phi_{QR_0}(\underline{\underline{A}}_p)$ eine Gruppe von minimaler Ordnung. Dann ist G monolithisch, also zyklisch, und es gibt eine Formation $\underline{\underline{H}}$ mit $QR_0(G, \underline{\underline{H}}) = \underline{\underline{A}}_p$ und $\underline{\underline{H}} \subsetneq \underline{\underline{A}}_p$. Dann enthält $\underline{\underline{H}}$ eine Gruppe, deren Exponent größer als der Exponent von G ist. Folglich ist $G \in Q \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}$ im Widerspruch zu $\underline{\underline{H}} \neq \underline{\underline{A}}_p$. Also liegt jede Gruppe aus $\underline{\underline{A}}_p$ in der Frattiniklasse. q.e.d.

Als Korollar zu (5.1.1) und (5.1.2) erhalten wir mit dem Lemma (4.2.8) über die D_0 -Zerlegung von QR_0 -Frattiniklassen nun folgende Aussage:

(5.1.3) KOROLLAR:

(a) $\Phi_{QR_0}(\underline{N}) = \underline{N}$

(b) $\Phi_{QR_0}(\underline{A}) = \underline{A}$

Das Beispiel der Formation $\underline{A}_p$ aus (5.1.2) lehrt außerdem, daß es möglich sein sollte, die QR_0 -Frattiniklasse einer Formation $\underline{F}$ zu bestimmen, wenn jede monolithische Gruppe G aus $\underline{F}$ durch Formationeninvarianten bis auf Isomorphie bestimmt ist, im Beispiel $\underline{A}_p$ durch ihren Exponenten. Wir präzisieren die Beobachtung über Formationeninvarianten in Bezug auf die QR_0 -Frattiniklasse:

(5.1.4) BEMERKUNG über Formationeninvarianten und QR_0 -Frattiniklassen:

Seien $z_1, \dots, z_n$ Formationeninvarianten und $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}$, sei $\Omega := \{1, \dots, n\}$, und sei $\underline{F}$ eine Formation mit $z_i(G) \leq w_i$ für alle $G \in \underline{F}$. Es gebe Gruppen $G_i \in \underline{F}$ mit $z_i(G_i) = w_i$ für alle $i \in \Omega$. Außerdem sei das System $z_1, \dots, z_n$ der Invarianten für $\underline{F}$ vollständig in dem Sinn, daß zwei Gruppen X und Y aus $\underline{F}$ mit $z_i(X) = z_i(Y)$ für alle $i \in \Omega$ dieselbe Formation erzeugen.

Sei $W(\underline{F}) := \{G \mid z_i(G) \leq w_i - 1 \text{ für alle } i \in \Omega\}$. Dann gelten:

(1) Es gibt eine Gruppe H mit $z_i(H) = w_i$ für alle $i \in \Omega$, so daß $\underline{F} = QR_0(H)$ gilt.

(2) Es ist $W(\underline{F}) \subseteq \Phi_{QR_0}(\underline{F})$.

Beweis:

(1) Für die Gruppe $H := G_1 \times \dots \times G_n$ gilt $z_i(H) = w_i$ für alle $i \in \Omega$, die Vollständigkeit des Systems der Invarianten impliziert $QR_0(H) = \underline{F}$.

(2) Sei $X \in W(\underline{F})$, und sei $\underline{H}$ Formation mit $QR_0(X, \underline{H}) = \underline{F}$. Für jedes $i \in \Omega$ muß $\underline{H}$ eine Gruppe H_i mit $z_i(H_i) = w_i$ enthalten, denn es ist $z_i(X) \leq w_i - 1$, und z_i ist Formationeninvariante. Da je zwei Gruppen in $\underline{F}$ mit gleichen Werten der Invarianten $z_1, \dots, z_n$ dieselbe Formation erzeugen, ist (mit H wie in (1)) $QR_0(H) = QR_0(H_1 \times \dots \times H_n) = \underline{F}$, also $\underline{H} = \underline{F}$ und $X \in \Phi_{QR_0}(\underline{F})$. q.e.d.

(5.1.5) BEMERKUNG: Es gibt Formationen $\underline{X}$ und $\underline{Y}$, denen sich wie in (5.1.4) Klassen $W(\underline{X})$ und $W(\underline{Y})$ zuordnen lassen, so daß Aussagen (1)-(3) gelten:

(1) Es ist $W(\underline{X}) = \Phi_{QR_0}(\underline{X})$.

(2) Es ist $W(\underline{Y}) \subsetneq \Phi_{QR_0}(\underline{Y})$.

(3) Es ist $\underline{Y} \not\leq \underline{X}$, aber $\Phi_{QR_0}(\underline{Y}) = \Phi_{QR_0}(\underline{X})$.

Beweis: Mit Notation wie in Beispiel (2.5.3) bilden die Formationeninvarianten, die durch Klasse von G und die numerischen Exponenten der Exponenten von G und G' (für $G \in \underline{X}$) definiert sind, für $\underline{X}$ ein vollständiges System im Sinn von (5.1.4). Also ergeben sich

$$W(\underline{X}) = (G \mid c(G) \leq 1, \exp(G) \mid p, \exp(G') \mid 1) = \underline{K}_p,$$

$$W(\underline{Y}) = (G \mid c(G) \leq 1, \exp(G) \mid 1, \exp(G') \mid 1) = (1).$$

Unter Verwendung von (4.1.4) lassen sich aus der in (2.5.3)

angegebenen Struktur des Verbandes der Teilformationen
von $\underline{X}$ die Frattiniklassen bestimmen: Es gilt

$$\phi_{QR_0}(\underline{X}) = \underline{Y} \cap \underline{Z} = \underline{K}_p = \phi_{QR_0}(\underline{Y}),$$

also sind Aussagen (1)-(3) nachgewiesen.

q.e.d.

5.2. Ein ϕ_{QR_0} -Kriterium und Konsequenzen

Mit Hilfe der minimalen sd-Darstellung (2.2.1) ist es möglich, ein nützliches Kriterium über die QR_0 -Frattiniklasse zu beweisen:

(5.2.1) THEOREM (ϕ_{QR_0} -Kriterium): Sei $\underline{F}$ eine Formation, und sei G eine monolithische Gruppe aus $\underline{F}$.

Es gebe eine Gruppe H , die die Bedingungen (1)-(4) für G erfüllt:

- (1) H monolithisch
- (2) $H \in \underline{F}$
- (3) $G \in QR_0(H)$
- (4) $(S(H) \text{ in } H)$ ist nicht similar zu einem Hauptfaktor von G in G .

Dann ist $G \in \phi_{QR_0}(\underline{F})$.

Beweis: Sei G eine Gruppe, zu der es eine Gruppe H gibt, die Bedingungen (1)-(4) für G erfüllt. Sei $\underline{H}$ eine Formation, die $\underline{F}$ zusammen mit G erzeugt, also $\underline{F} = QR_0(G, \underline{H})$.

Als Gruppe in $\underline{F}$ hat H nach (2.2.1) eine minimale sd-Darstellung $(H_1, \dots, H_n) \subseteq \underline{H} \cap Q(G)$. Im Fall $H_i \in Q(G)$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ wäre $(S(H_i) \text{ in } H_i)$ similar zu $(S(H) \text{ in } H)$ im Widerspruch zu Bedingung (4). Also gilt $(H_1, \dots, H_n) \subseteq \underline{H}$, daraus folgt $H \in QR_0 \underline{H} = \underline{H}$. Aber mit Bedingung (3) führt letzteres zu $G \in \underline{H}$ und so zu $\underline{H} = \underline{F}$.

Darum ist nach Definition der Frattiniklasse $G \in \phi_{QR_0}(\underline{F})$.

q.e.d.

Durch das Φ_{QR_0} -Kriterium ist eine konstruktive Lösungsmethode vorgezeichnet: Zu einer gegebenen monolithischen Gruppe G aus einer Formation $\underline{F}$ ist eine geeignete Erweiterung H zu finden. Das Problem ist dabei, die Erweiterung klein genug zu halten, damit sie in der Klasse $\underline{F}$ bleibt, während andererseits die Bedingung der Nichtsimilarität nur bei hinreichender Vergrößerung erfüllt werden kann.

In Situationen, in denen sozusagen alle primitiven Gruppentypen schon verbraucht sind, kann es keine Erweiterung zu G geben, die den Forderungen des Kriteriums genügt:

(5.2.2) LEMMA: Seien $W_1, \dots, W_n$ die irreduziblen $\mathbb{F}_p X$ -Moduln für ein $p \in \mathbb{P}$. Sei $G := [W_1 \oplus \dots \oplus W_n] X$ semidirektes Produkt von X mit der Summe der W_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dann treten alle irreduziblen $\mathbb{F}_p G$ -Moduln als Hauptfaktoren von G auf.

Beweis: klar

Dennoch kann eine Gruppe G in der QR_0 -Frattiniklasse einer Formation $\underline{F}$ liegen, obwohl es keine Gruppe H gibt, die für G dem Φ_{QR_0} -Kriterium genügt:

(5.2.3) BEISPIEL: Sei $\underline{F} = QR_0(C_4)$.

Dann ist $\Phi_{QR_0}(\underline{F}) = K_2$, aber zu C_2 gibt es keine Gruppe, die die Bedingungen des Φ_{QR_0} -Kriteriums erfüllt.

Beweis: Die einzigen monolithischen Gruppen in $\underline{F}$ sind zyklisch der Ordnungen 2 und 4, aber in jedem Erzeugendensystem von $\underline{F}$ muß eine Gruppe des Exponenten 4 auftreten. Also folgt $\phi_{QR_0}(\underline{F}) = QR_0(C_2) = \underline{K}_2$. Weil in $\underline{F}$ nur Gruppen liegen, deren sämtliche Hauptfaktoren zentral sind, kann Bedingung (4) des Kriteriums (5.2.1) nicht erfüllt werden.

q.e.d.

Wir notieren zwei weitere Versionen des ϕ_{QR_0} -Kriteriums:

(5.2.4) KOROLLAR (Globale Version des ϕ_{QR_0} -Kriteriums):

Sei $\underline{F}$ eine Formation. Gibt es zu jeder monolithischen Gruppe G in $\underline{F}$ eine Gruppe H mit Eigenschaften (1)-(4) aus dem ϕ_{QR_0} -Kriterium (5.2.1), so hat $\underline{F}$ keine maximalen Teilformationen.

(5.2.5) KOROLLAR (Relative Version des ϕ_{QR_0} -Kriteriums):

Sei $\underline{F}$ eine Formation, und sei $G \in \underline{F}$ monolithisch.

Gilt $G \in \phi_{QR_0}(\underline{F})$ via ϕ_{QR_0} -Kriterium mit $H \in \underline{F}$, so gilt auch $G \in \phi_{QR_0}(\underline{H})$ für jede Formation $\underline{H}$ mit $H \in \underline{H}$, insbesondere für jede Formation mit $\underline{F} \leq \underline{H}$.

An der relativen Version wird deutlich, daß es sich eher um ein Kriterium zwischen G und H als eines zwischen G und $\underline{F}$ handelt. Außerdem leistet (5.2.5) einen Beitrag zu der Frage der Monotonie von ϕ_{QR_0} in dem Fall, in dem G via ϕ_{QR_0} -Kriterium in der Frattiniklasse liegt.

Eine einfache, aber nützliche Folgerung aus dem Φ_{QR_0} -Kriterium ist (5.2.6):

(5.2.6) LEMMA: Sei $\underline{F}$ eine Formation, und sei G primitive monolithische Gruppe in $\underline{F}$.

Dann ist $(Q-1)(G) \subseteq \Phi_{QR_0}(\underline{F})$.

Beweis: Es genügt, zu zeigen, daß $\bar{G} := G/S(G) \in \Phi_{QR_0}(\underline{F})$ ist.

Für eine Formation $\underline{H}$ mit $\underline{F} = QR_0(\bar{G}, \underline{H})$ hat G eine minimale sd-Darstellung $(G_1, \dots, G_n) \in \underline{H} \cup Q(\bar{G})$ nach (2.2.1). Weil nach (2.4.6) $G \notin QR_0(\bar{G})$ ist, gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $G_i \in \underline{H}$.

Aber das Similaritätsargument nach (2.2.1-4) führt zu

$$G \cong \text{Pr}(G, S(G)) \cong \text{Pr}(G_1, S(G_1)) \in QR_0 \underline{H} = \underline{H}.$$

Also ist $\bar{G} \in \Phi_{QR_0}(\underline{F})$.

q.e.d.

Nun kennen wir die QR_0 -Frattiniklasse der Formation, die von einer primitiven Gruppe erzeugt wird:

(5.2.7) SATZ: Sei G primitive Gruppe, und sei $\underline{F}$ die von G erzeugte Formation.

Dann ist $\Phi_{QR_0}(\underline{F}) = QR_0(G/S(G))$.

Beweis: Wegen der Struktur primitiver Gruppen des Typs 3

($G \in \underline{P}_3$ impliziert $G/N \cong G/M \in \underline{P}_2$ mit $S(G) = NM \# N \# M$ [11, 1]) genügt

es, $G \in \underline{P}_1 \vee \underline{P}_2$ zu betrachten. Mit $\bar{G} := G/S(G)$ folgt $\bar{G} \in \Phi_{QR_0}(\underline{F})$

nach (5.2.6). Wegen $QR_0(G) = R_0(G, QR_0(\bar{G}))$ nach (2.4.6)

ist G der einzige Kandidat für eine monolithische Gruppe

in $QR_0(G) \setminus QR_0(\bar{G})$, und G erzeugt $\underline{F}$.

Also ist $\Phi_{QR_0}(\underline{F}) = QR_0(\bar{G})$.

q.e.d.

Die Beschreibung aus (5.2.7) trifft nicht auf beliebige monolithische Gruppen zu:

(5.2.8) BEISPIEL: Sei $\underline{F}$ die von der Diedergruppe D_8 erzeugte Formation. Dann ist $C_4 \in \Phi_{QR_0}(\underline{F})$.

Beweis: Ist $\underline{H}$ eine Formation mit $\underline{F} = QR_0(C_4, \underline{H})$, so muß $\underline{H}$ eine Gruppe H von Klasse 2 enthalten. Dann hat H aber ein Element von Ordnung 4, also ist $C_4 \in S(H)$. Mit dem Untergruppenabschluß nilpotenter Formationen folgt $C_4 \in \underline{H}$, also $\underline{F} = \underline{H}$ und $C_4 \in \Phi_{QR_0}(\underline{F})$ nach Definition der Frattiniklasse.

q.e.d.

Offen bleibt, ob $QR_0(G/S(G))$ stets in $\Phi_{QR_0}(QR_0(G))$ enthalten ist. Dies wäre insbesondere für die Frage der Existenz einer gesättigten Formation mit maximalen Teilformationen interessant.

Als Korollar zu (5.2.6) erhalten wir im Universum auflösbarer Gruppen folgende Beobachtung:

(5.2.9) KOROLLAR: Sei $\underline{F}$ eine Formation auflösbarer Gruppen. Dann ist $\underline{F} \subseteq \underline{N} \Phi_{QR_0}(\underline{F})$.

Beweis: Sei $G \in \underline{F} \setminus \underline{N} \Phi_{QR_0}(\underline{F})$ minimal. Da $\underline{N} \Phi_{QR_0}(\underline{F})$ eine gesättigte Formation ist, ist $G \in \underline{P}_1$ mit $S(G) = F(G)$. Mit (5.2.6) ist $G \in \underline{N}(G/S(G)) \subseteq \underline{N} \Phi_{QR_0}(\underline{F})$ im Widerspruch zur Annahme. Also gilt die Behauptung.

q.e.d.

Im Universum endlicher Gruppen gilt eine zu (5.2.9) analoge Aussage nicht:

(5.2.10) BEISPIEL: Sei E einfache nichtabelsche Gruppe, und sei $\underline{F} = \text{QR}_0(E)$. Nach (2.4.6) ist $\underline{F} = \text{D}_0(1, E)$, und nach (5.2.6) ist $\Phi_{\text{QR}_0}(\underline{F}) = (1)$. Aber $\underline{F} \neq \underline{N}$ gilt.

Wie schon bemerkt, stellt die Behandlung frattinischer Hauptfaktoren ein Problem in der Formationentheorie insgesamt dar. Im Kontext der Frattiniklassen ist der folgende Satz über frattinische Hauptfaktoren eine Hilfe.

(5.2.11) SATZ: Sei $\underline{F}$ eine Formation, und sei H/K frattinischer Hauptfaktor einer Gruppe G aus $\underline{F}$.

Dann liegt die primitive Gruppe $\text{Pr}(G, H/K)$ in $\Phi_{\text{QR}_0}(\underline{F})$.

Beweis: Es bezeichne $P := \text{Pr}(G, H/K)$ den primitiven Gruppentyp von H/K in G . Unter Beachtung von (2.1.5) können wir annehmen, daß G monolithisch ist. Ist $\underline{H}$ eine Formation mit $\underline{F} = \text{QR}_0(P, \underline{H})$, so hat G eine minimale sd-Darstellung $(G_1, \dots, G_n) \subseteq Q(P) \vee \underline{H}$. Definieren wir

$$\underline{X} := (X \mid \text{Ist } R/S \text{ Hauptfaktor von } X \text{ mit } X/C_X(R/S) \cong G/C_G(H/K), \\ \text{so ist } R/S \text{ nicht frattinisch}),$$

so ist nach (2.1.4) $\underline{X}$ eine Formation, und $P \in \underline{X}$ gilt.

Wäre $G_i \in Q(P)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so läge die Gruppe G in $\underline{X}$, aber das stünde in Widerspruch dazu, daß G einen frattinischen Hauptfaktor mit primitivem Gruppentyp P hat.

Also gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $G_j \in \underline{H}$. Daraus folgt mit (2.2.1-4) aber

$$P \cong \text{Pr}(G_j, S(G_j)) \in \text{QR}_0 \underline{H} = \underline{H},$$

und schließlich $P \in \Phi_{\text{QR}_0}(\underline{F})$ wie behauptet. q.e.d.

Im Vergleich mit dem Φ_{QR_0} -Kriterium (5.2.1) wird deutlich, daß der Satz (5.2.11) über frattinische Hauptfaktoren in Situationen greift, die sich mit (5.2.1) nicht behandeln lassen. Als einfachstes Beispiel können wir zeigen, daß $C_2 \in \Phi_{\text{QR}_0}(\text{QR}_0(C_4))$ ist (vgl. (5.2.3)), es folgen auch $S_3 \in \Phi_{\text{QR}_0}(\text{QR}_0(D_{18}))$ für die von der Diedergruppe D_{18} und $C_2 \in \Phi_{\text{QR}_0}(\text{QR}_0(\text{SL}(2,3)))$ für die von der speziellen linearen Gruppe $\text{SL}(2,3)$ erzeugte Formation. Eine explizite Beschreibung der QR_0 -Frattiniklasse ergibt sich mit (5.2.1) und (5.2.11) nicht, wir verweisen auf das Beispiel der Klasse der p -Gruppen (5.1.1).

5.3. Gesättigte Formationen ohne maximale Teilformationen

Ziel dieses Teils ist, zu zeigen, daß eine gesättigte Formation mit gesättigter lokaler Erklärung keine maximalen Teilformationen hat. Formationen dieses Typs sind zahlreich: Die Eigenschaft haben insbesondere die primitiv gesättigten Formationen im Sinn von HAWKES [16, 4-5], also genau die gesättigten Formationen, die zugleich untergruppenabgeschlossene Fittingklassen sind [4, 4; 16, 4], dazu zählen unter vielen anderen die Klassen $\underline{N}^n$ von Gruppen nilpotenter Länge höchstens n , die Klassen von Gruppen mit beschränkter p -Länge, und Produkte von Klassen der Gestalt $\underline{S}_{\pi}$ für eine Primzahlmenge π . Außerdem haben Klassen der Form $\underline{X} = \underline{N}_{\pi}^2 \underline{F}$ für eine beliebige Formation $\underline{F}$ mit $\pi := \text{char } \underline{F}$ gesättigte kanonische lokale Erklärung, denn $\underline{N}_{\pi} \underline{F}$ ist gesättigte Formation und lokale Erklärung von $\underline{X}$; ähnliche Beispiele stellen Klassen $\underline{X} = \underline{N}_{\pi} \underline{Y}$ mit einer gesättigten Formation $\underline{Y}$ der Charakteristik π .

Zunächst beweisen wir zwei Sätze, die auch von eigenständiger Bedeutung sind. Der Satz über frattinische Hauptfaktoren (5.2.11) erlaubt eine interessante Anwendung auf gesättigte Formationen:

(5.3.1) SATZ: Sei $\underline{X}$ gesättigte Formation.

Dann ist $\underline{P} \wedge \underline{X} \subseteq \phi_{QR_0}(\underline{X})$.

Beweis: Sei $G \in \mathcal{P}_1^{\mathcal{P}} \mathcal{X}$ für ein $p \in \mathcal{P}$. Als G -Modul betrachtet ist der Sockel $S(G) =: N$ irreduzibel mit der p -Gruppe $N = C_G(N)$ im Kern. Es ist $O_p(G) = 1$. Sei $P := P_G(N)$ die projektive Hülle von N als G -Modul, und bezeichne $H := [P]G$ das semidirekte Produkt. Dann ist H nach (1.3.4(1-2)) monolithisch, der Monolith $W := S(H)$ ist frattinisch wegen $C_G(N) \neq 1$. Nach (1.3.4(3-1)) ist $H \in \mathcal{X}$. Mit H haben wir eine Gruppe in $\mathcal{X}$ mit frattinischem Hauptfaktor W von primitivem Gruppentyp $\text{Pr}(H, W) \cong \text{Pr}(G, N) \cong G$ konstruiert. Darum liefert der Satz über frattinische Hauptfaktoren (5.2.11) die Behauptung $G \in \Phi_{\text{QR}_0}(\mathcal{X})$, falls G primitiv des Typs 1 ist.

Sei $G \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{P}} \mathcal{X}$ für ein $p \in \mathcal{P}$. Da G monolithisch mit $O_p(G) = 1$ ist, existiert nach (1.3.1-b) eine Gruppe $H \in \mathcal{P}_1$ mit $H/S(H) \cong G$, also mit $H \in \mathcal{S}_p \mathcal{X}^*(p) \in \mathcal{X}$ nach (3.1.1-c). Das heißt, $G \in (Q-1)(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{X}) \subseteq \Phi_{\text{QR}_0}(\mathcal{X})$ nach (5.2.6). q.e.d.

Bei Verwendung des Φ_{QR_0} -Kriteriums wurden bislang zu $G \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ Formation) Gruppen H konstruiert, die G als Faktorgruppe hatten. Im nächsten Beweis nutzen wir Situationen aus, in denen G Faktorgruppe eines Supplements der Fittinggruppe von H ist, also im sogenannten S_w -Abschluß liegt.

(5.3.2) SATZ: Sei $\mathcal{F}$ eine Formation.

- (a) Es gelte $\mathcal{S}_{p=q} \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ für Primzahlen $p \neq q$. Dann ist $\mathcal{S}_p \subseteq \Phi_{\text{QR}_0}(\mathcal{F})$.
- (b) Es seien $\mathcal{F}$ gesättigt und H/K ein nichtabelscher Hauptfaktor einer Gruppe $G \in \mathcal{F}$ mit $\pi := \{r \mid r \in \pi(H/K)\}$. Dann ist $N_\pi \subseteq \Phi_{\text{QR}_0}(\mathcal{F})$.

Beweis: Zu H/K aus (b) bilden wir $T := G/C_G(H/K) \in \underline{P}_2$, und sei $p \in \pi$. Weil $\underline{F}$ lokale Formation ist, gilt $\underline{N}_{\pi} QR_O(T) \subseteq \underline{F}$ nach (3.1.1-c).

Für Teil (a) nehmen wir $T \cong C_q$ zyklisch von Ordnung q .

Nun können wir für (a) und (b) gemeinsam vorgehen, indem wir zu gegebener Gruppe $X \in \underline{S}_p$ eine Gruppe H konstruieren, die für X die Bedingungen (1)-(4) des Φ_{QR_O} -Kriteriums (5.2.1) für die Formation $\underline{S}_p QR_O(T)$ erfüllt.

Sei $K := X \wr_T$ reguläres Kranzprodukt von X und T , und sei V ein treuer irreduzibler $\mathbb{F}_p T$ -Modul, ein solcher existiert nach Lemma (1.3.1-a). Betrachten wir V als K -Modul mit $B = O_p(K)$ im Kern (wobei B die Basisgruppe von K bezeichnet), so ist das semidirekte Produkt $H := [P_K(V)]K$ von K mit der projektiven Hülle von V in K monolithisch nach (1-1) aus (1.3.4), und wir haben Bedingung (1) des Kriteriums nachgewiesen. Weiterhin sichert $\text{Pr}(H, S(H)) \cong [V]T \not\leq C_p$ Bedingung (4).

Es ist $H/O_p(H) \cong T$, also $H \in \underline{S}_p QR_O(T)$ für Bedingung (2).

Weiter gilt $F(H) = O_p(H) \cong B P_K(V)$. Die Hauptdiagonale, D , von B liegt in $C_K(T)$, dies ist eine bekannte Eigenschaft des Kranzproduktes [21, 3.2]. Insbesondere ist TD direktes Produkt von T und D , welches die Fittinggruppe $F(H)$ in H supplementiert. Nach [3, 1.5] impliziert dies $T \cdot D \in QR_O(H)$, und $X \cong D \in Q(T \cdot D) \subseteq QR_O(H)$ steht für Bedingung (3).

Folglich genügt H dem Φ_{QR_O} -Kriterium für X , und

$X \in \Phi_{QR_0}(\underline{S}_p QR_0(T))$ ist gezeigt. Da $\underline{S}_p QR_0(T)$ eine Teilformation von $\underline{F}$ ist, liegt X nach der relativen Version (5.2.5) des Kriteriums auch in $\Phi_{QR_0}(\underline{F})$. q.e.d.

Der größte Teil des Beweises, daß eine gesättigte Formation $\underline{X}$ mit gesättigter kanonischer lokaler Erklärung triviale Frattiniklasse hat, besteht darin, eine Gruppe H zu konstruieren, die für $G \in \underline{X}$ die Forderungen des Φ_{QR_0} -Kriteriums (5.2.1) erfüllt, falls G monolithisch und nicht nilpotent ist. Um auch in Situationen, in denen eine Erweiterung von G nicht auf einen neuen primitiven Gruppentyp gemäß Bedingung (5.2.1-4) führen kann (vgl. (5.2.2) und Vorbemerkung dazu), eine entsprechende Gruppe H zu finden, benutzen wir die Sättigung der kanonischen lokalen Erklärung von $\underline{X}$. In Hinblick auf (3.1.6) ist Sättigung der kanonischen lokalen Erklärung die schwächste Art lokaler Sättigung, die gefordert werden kann.

(5.3.3) SATZ: Sei $\underline{X} = LF(\bar{X})$ eine gesättigte Formation mit voller inklusiver lokaler Erklärung $\bar{X}$, die die Eigenschaft $\bar{X}(q) = E_p \bar{X}(q)$ für alle $q \in \text{char } \underline{X}$ hat, sei $\underline{X} \neq (1)$.

Sei $G \in \underline{X} \setminus \underline{N}$ eine monolithische Gruppe, deren Monolith eine p -Gruppe ist.

Dann ist $G \in \Phi_{QR_0}(\underline{X})$ via Φ_{QR_0} -Kriterium mit einer Gruppe H , die G als Faktorgruppe enthält.

Beweis: (1) Zuerst gehen wir zu dem epimorphen Bild $\bar{G} := G/O_p(G)$ über und konstruieren eine geeignete Erweiterung von $\bar{G}$.

Da $G \in \underline{X}$ mit $O_p(G)=1$ gilt, liegt $\bar{G}$ in $\bar{x}(p)$.

(2) Den Sockel von $\bar{G}$ zerlegen wir wie folgt in

$$S(\bar{G}) = \bar{N}_1 \times \dots \times \bar{N}_n:$$

Seien $\{q_1, \dots, q_n\}$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ die Primteiler der Ordnung des auflösbaren Teils von $S(\bar{G})$; falls $\bar{G}$ keinen abelschen minimalen Normalteiler hat, wählen wir eine Primzahl $q_1 \in \pi(S(\bar{G}))$ mit $q_1 \nmid p$ und setzen $n=1$ (ein solches q_1 existiert wegen der Nichtauflösbarkeit von $S(\bar{G})$). Sei $\Omega := \{1, \dots, n\}$. Nun seien $\bar{N}_1 := S_{q_1}(\bar{G}) \times S_J(\bar{G})$ und $\bar{N}_i := S_{q_i}(\bar{G})$ für $i \in \{2, \dots, n\}$, offensichtlich ist $p \nmid q_i$ für alle $i \in \Omega$.

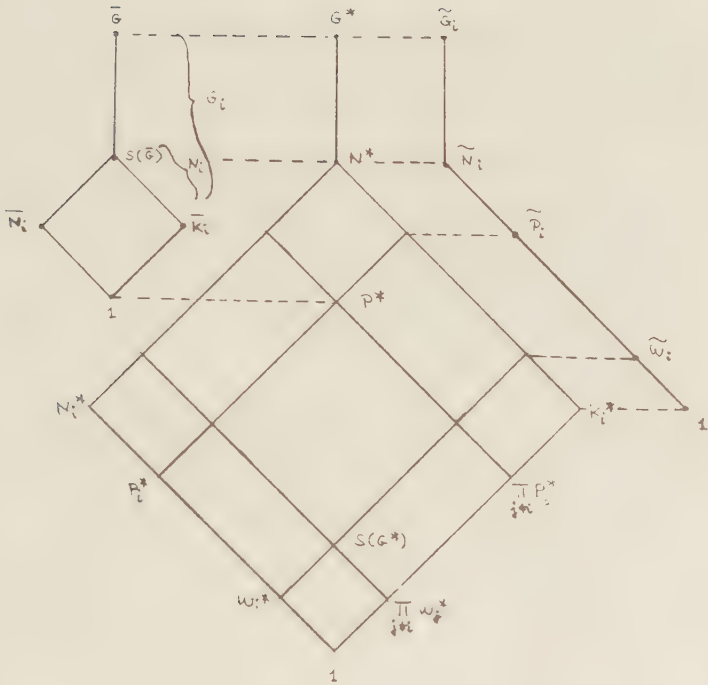
Für $i \in \Omega$ seien weiter $\bar{K}_i := \bigtimes_{j \neq i, j \in \Omega} \bar{N}_j$ der Kern der Projektion von $S(\bar{G})$ auf die Komponente $\bar{N}_i$ und $G_i := \bar{G}/\bar{K}_i$ definiert. Die Gruppe G_i kann als Faktorgruppe von $\bar{G}$ betrachtet werden, die von dem ursprünglichen Sockel von $\bar{G}$ nur den q_i -Anteil (und eventuell den nichtauflösbaren Anteil) als $N_i \trianglelefteq G_i$ enthält (vgl. Diagramm auf S. 97).

(3) Sei $i \in \Omega$, und seien V_i der triviale $\mathbb{F}_{q_i} G_i$ -Modul und $P_i := P_{G_i}(V_i)$ die projektive Hülle von V_i in G_i . Wir betrachten P_i als G -Modul mit $\bar{K}_i$ zusätzlich im Kern.

Nun bilden wir das semidirekte Produkt

$$G^* := [P_1 \oplus \dots \oplus P_n] \bar{G}$$

von $\bar{G}$ mit der direkten Summe der Moduln P_i , $i \in \Omega$. Ist für $i \in \Omega$ nun $[P_i] G_i$ semidirektes Produkt von P_i und G_i , so liegt $[P_i] G_i$ nach (1.3.4-3-2) in der gesättigten Formation $\bar{x}(p)$, und somit ist nach Konstruktion $G^* \in R_0 \bar{x}(p) = \bar{x}(p)$.



Mit $W_i := S(P_i)$ für den Fuß von P_i ist W_i als Gruppe isomorph zur zyklischen Gruppe C_{q_i} , und die zu W_i korrespondierende Untergruppe $W_i^* \leq G^*$ ist minimaler Normalteiler von G^* .

Wir wollen Lemma (1.2.5) anwenden, um $S(G^*) = W_1^* \times \dots \times W_n^* =: W^*$ zu zeigen:

Wenn wir "G" aus (1.2.5) durch G^* , "Q" durch $P^* := P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ und "N" durch $N^* := [P_1 \oplus \dots \oplus P_n] \bar{N}$ ersetzen (wobei N_i^* zu $[P_i] N_i$ korrespondiert), so können wir in allen anderen

Punkten genau dieselbe Notation wie in (1.2.5) verwenden. Nun testen wir an der Konstruktion von G^* , ob die Bedingungen (1)-(3) von (1.2.5) erfüllt sind:

Da alle Primzahlen q_i für $i \in \Omega$ paarweise verschieden sind, ist $\text{Comp}(N^*) = \text{Comp}(N_1^*) \cup \dots \cup \text{Comp}(N_n^*)$ gegeben (Bedingung (1)), und wir sind von $S(\bar{G}) = \bar{N}_1 \times \dots \times \bar{N}_n$ ausgegangen (Bedingung (2)). Die letzte Bedingung (3), also $S(\tilde{G}_i) \cap \tilde{N}_i = \tilde{W}_i \leq \tilde{Q}_i$ für alle $i \in \Omega$, folgt aus $N_i \cap O_{q_i}(G_i) = 1$ nach (1.3.4-2-1).

Da nach (1.2.5) nun $S(G^*) = W^*$ gilt, ist gesichert, daß der auflösbare Teil von $S(G^*)$ als G^* -Modul von einem Element erzeugt wird, folglich können wir das Lemma (1.3.1) auf G^* und $\mathbb{F}_p$ anwenden.

(4) Gemäß (1)-(3) gibt es eine Gruppe G^* , die (§) erfüllt:

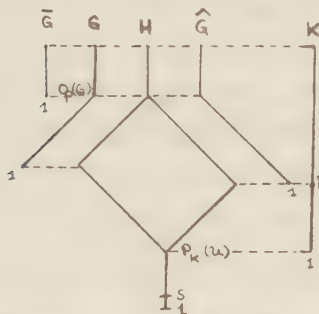
$$(\S) \left\{ \begin{array}{l} - G \in Q(G^*) \\ - S(G^*) \text{ als } G^*\text{-Modul von einem Element erzeugt} \\ - |G^*| > |\bar{G}| \\ - G^* \in \mathcal{X}(p) \end{array} \right.$$

Die Zunahme der Ordnung $|G^*| \cdot |\bar{G}|$ hängt von $\bar{G} > 1$ ab, hier geht ein, daß G nicht nilpotent ist.

An dieser Stelle bemerken wir, daß durch Wiederholung des Schritts (3) eine Gruppe beliebig großer Ordnung konstruiert werden kann, die (§) erfüllt. Sei $\hat{G}$ eine solche Erweiterung von $\bar{G}$ mit $|\hat{G}| > |GL(k, p)|$, wobei k das Maximum der Grade der irreduziblen Darstellungen von G über $\mathbb{F}_p$ ist.

Ist U ein treuer irreduzibler $\mathbb{F}_p \hat{G}$ -Modul, dessen Existenz durch das Lemma (1.3.1) garantiert wird, so muß die Dimension von U über $\mathbb{F}_p$ dann k übersteigen, insbesondere ist $|U|$ größer als die Ordnung jedes p -Hauptfaktors von G .

(5) Sei $K := G \rtimes \hat{G}$ direktes Produkt von G und $\hat{G}$ mit vereinig-



ter Faktorgruppe isomorph zu $\bar{G}$. Es gibt ein $R \leq K$ mit $K/R \cong \hat{G}$ und $R \cong O_p(G)$. (Skizze)

Als K -Modul ist U irreduzibel mit $C_K(U) = R$.

Weiter gilt

$$K \in R_0(G, \hat{G}) \in R_0(\bar{X}(p)) = \bar{X}(p).$$

(6) Schließlich sei $H := [P_K(U)]K$ semidirektes Produkt von K mit der projektiven Hülle von U in K . Es bezeichne S den Sockel von $P_K(U)$.

Wir weisen für H die Bedingungen (1)-(4) des $\Phi_{\mathbb{Q}R_0}$ -Kriteriums nach:

(1) H ist monolithisch nach (1.3.4-1-2).

(2) H liegt in $\bar{X}$, denn $H \in S_p(K) \in S_p(\bar{X}(p)) = \bar{X}(p) \subseteq \bar{X}$ gilt.

(3) $G \in Q(H)$ ist offensichtlich.

(4) Nichtsimilarität folgt aus den Überlegungen zur Dimension von U in Schritt (4).

Also kann zu jeder monolithischen Gruppe $G \in \bar{X} \setminus \bar{N}$ eine Gruppe H gefunden werden, die G in die Frattiniklasse bringt. q.e.d.

Schließlich können wir die Teile zusammensetzen, die den Hauptsatz ergeben:

(5.3.4) THEOREM: Sei $\underline{X} = \text{LF}(\bar{x}) \# (1)$ eine gesättigte Formation mit gesättigter voller und inklusiver lokaler Erklärung $\bar{x}$. Dann ist $\phi_{\text{QR}_0}(\underline{X}) = \underline{X}$, das heißt, $\underline{X}$ hat keine maximalen Teilformationen.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß jede monolithische Gruppe $G \in \underline{X}$ in der QR_0 -Frattiniklasse von $\underline{X}$ liegt. Mit (5.3.1) für den Fall eines nichtabelschen Sockels und mit (5.3.3) für den Fall eines abelschen Sockels einer nichtnilpotenten Gruppe genügt es nun, den Fall einer p -Gruppe G für ein $p \in \pi := \text{char } \underline{X}$ zu behandeln. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) Es gibt eine Primzahl $q \in \pi$ mit $p \nmid q$ und $p \in \text{char } \bar{x}(q)$.

Wegen der Sättigung von $\bar{x}(q)$ ist $\underline{S}_p \in \bar{x}(q)$ und insbesondere $G \in \bar{x}(q)$. Also gibt es eine primitive Gruppe H mit q -Sockel und $H/S(H) \cong G$ (1.3.1-b), und nach (5.2.6) ist G in der QR_0 -Frattiniklasse.

(2) Für alle $q \in \pi$ mit $p \nmid q$ gilt $p \notin \text{char } \bar{x}(q)$.

Ist $\bar{x}(p) = \underline{S}_p$, so ist $\underline{X} = D_0(\underline{S}_p, \underline{X} \cap \underline{E}_p)$ nach (3.1.7). Nach dem Lemma (4.2.8) über die direkte Zerlegung der QR_0 -Frattiniklasse erhalten wir $\phi_{\text{QR}_0}(\underline{X}) = D_0(\phi_{\text{QR}_0}(\underline{S}_p), \phi_{\text{QR}_0}(\underline{X} \cap \underline{E}_p))$, und weil $\phi_{\text{QR}_0}(\underline{S}_p) = \underline{S}_p$ nach (5.1.1) gilt, liegt jede p -Gruppe G in $\phi_{\text{QR}_0}(\underline{X})$.

Ist $\bar{x}(p) \neq \underline{S}_p$, so finden wir eine Primzahl $r \in \text{char } \bar{x}(p)$ mit $r \nmid p$, und $\underline{S}_p \underline{S}_r = \underline{X}$ folgt, weil $\bar{x}(p)$ gesättigt ist. In diesem letzten Fall erlaubt (5.3.2) den Schluß $G \in \underline{S}_p \in \phi_{\text{QR}_0}(\underline{X})$.

Damit ist der Beweis von $\phi_{\text{QR}_0}(\underline{X}) = \underline{X}$ abgeschlossen. q.e.d.

6. SF-FRATTINIKLASSEN

Der dritte Hauptteil über Frattiniklassen ist der Untersuchung der SF-Frattiniklasse einer gesättigten Formation gewidmet. Wie gesättigte Formationen mit Formationen und mit Schunckklassen verwandt sind, gibt es zwei natürliche Zugänge zur SF-Frattiniklasse: einerseits durch die minimale lokale Erklärung und die zugehörigen QR_0 -Frattiniklassen und andererseits durch die PQ-Frattiniklasse, die - man vergleiche deren Basisdarstellung (4.3.1) - einen globalen Ansatz bringt. Im QR_0 -Teil (6.2.) finden Resultate über QR_0 -Frattiniklassen Anwendung.

Wenn auch die Struktur der Ergebnisse der auflösbaren Situation angepaßt ist, wie es der historischen Entwicklung der Theorie entspricht, so können doch alle Aussagen für das Universum $\underline{E}$ bewiesen werden. Hier ist zu bemerken, daß das eigentliche Problem meistens im auflösbaren Universum $\underline{S}$ zu lösen ist, während die Verallgemeinerung auf $\underline{E}$ nach den Vorarbeiten aus Teil (3.) fast kanonisch ablaufen kann.

6.1. Einige Bemerkungen zu SF-Frattiniklassen

Während wir zeigen werden, daß allgemein $\phi_{PQ}(\underline{X}) \subseteq \phi_{SF}(\underline{X})$ für eine gesättigte Formation $\underline{X} \in \underline{S}$ gilt, ist die entsprechende Implikation für QR_0 - und SF-Frattiniklassen schon im Beispiel der p-Gruppen falsch:

(6.1.1) BEISPIEL: Es ist $\Phi_{QR_0}(\underline{S}_p) = \underline{S}_p$ nach (5.1.1), aber $\Phi_{SF}(\underline{S}_p) = (1)$, da jede p -Gruppe schon als gesättigte Formation $\underline{S}_p$ erzeugt.

Ob die umgekehrte Inklusion gilt, wurde nicht untersucht, denn der strukturgegebene Weg, QR_0 -Frattiniklassen und SF -Frattiniklassen zu verbinden, führt über die lokale Erklärung.

Bevor wir zum Beweis einzelner Aussagen kommen, notieren wir einen allgemeinen Reduktionsschritt, der durch (3.1.2) möglich wird und zur Verkürzung der Beweise gute Dienste leistet:

(6.1.2) REDUKTIONSSCHRITT: Sei $\underline{X} = LF(x^*)$ eine gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* , und sei $X \in \underline{X}$ primitiv und monolithisch.

Sei $\underline{H} = LF(h^*)$ eine gesättigte Formation mit $\underline{X} = SF(X, \underline{H})$ und minimaler lokaler Erklärung h^* .

Dann gelten für alle $p \in \text{char } \underline{X}$:

$$x^*(p) = QR_0(h^*(p), (G/S(G) \mid G \in P_1^p \cap Q(X)), (G \mid G \in P_2^p \cap Q(X)))$$

und entweder $X \in P_1^q$ und $X/S(X) \in x^*(q)$ } für $q \in \pi(S(X))$.
 oder $X \in P_2^q$ und $X \in x^*(q)$

Beweis: Bezeichnet $\underline{Y} := \underline{H} \cup Q(X)$ den Q -Abschluß von $(X, \underline{H})$, so läßt sich (3.1.2) auf $\underline{X} = SF(\underline{Y})$ anwenden:

Für alle $p \in \text{char } \underline{X}$ ist

$$\begin{aligned} x^*(p) &= QR_0((G/S(G) | G \in \underline{P}_1^p \cap \underline{Y}), (G | G \in \underline{P}_2^p \cap \underline{Y})) \\ &= QR_0((G/S(G) | G \in \underline{P}_1^p \cap \underline{H}), (G | G \in \underline{P}_2^p \cap \underline{H}), \\ &\quad (G/S(G) | G \in \underline{P}_1^p \cap Q(X)), (G | G \in \underline{P}_2^p \cap Q(X))) \\ &= QR_0(h^*(p), (G/S(G) | G \in \underline{P}_1^p \cap Q(X)), (G | G \in \underline{P}_2^p \cap Q(X))), \end{aligned}$$

da $\underline{H}$ gesättigte Formation mit h^* in der Gestalt aus (3.1.1-c) ist. Die restlichen Aussagen sind mit den Eigenschaften lokaler Erklärung klar. q.e.d.

(6.1.3) BEMERKUNG: Ist in (6.1.2) insbesondere $X \in \underline{S}$, so vereinfacht sich die Gestalt von x^* zu

$$x^*(p) = QR_0(h^*(p), (G/S(G) | G \in \underline{P}_1^p \cap Q(X))) \text{ für alle } p \in \text{char } \underline{X} \text{ und } X \in \underline{P}_1^q \text{ mit } X/S(X) \in x^*(q) \text{ für ein } q \in \text{char } \underline{X}.$$

Der übliche Weg, zu zeigen, daß eine SF-Basisgruppe X in der SF-Frattiniklasse der gesättigten Formation $\underline{X}$ liegt, ist, den Reduktionsschritt (mit Notation wie in (6.1.2)) zu verwenden, sodann in $x^*(p)$ den Teil zu eliminieren, der durch $\underline{P} \cap Q(X)$ oder $\underline{P} \cap Q(X/S(X))$ gegeben ist, und so $x^*(p) = h^*(p)$ oder $X \in h^*(p)$ und damit $X \in \underline{H}$ zu erhalten. Letzteres impliziert $\underline{H} = \underline{X}$ und nach Definition der Frattiniklasse $X \in \phi_{SF}(\underline{X})$.

6.2. Ansatz zur Bestimmung der SF-Frattiniklassen
über QR_0 -Frattiniklassen lokaler Erklärungen

Zwischen der SF-Frattiniklasse einer lokalen Formation und den QR_0 -Frattiniklassen ihrer minimalen lokalen Erklärung besteht folgender Zusammenhang:

(6.2.1) SATZ: Sei $\underline{X} = LF(x^*)$ eine gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* .

Sei eine Formationenfunktion y via

$$y(p) = \begin{cases} \Phi_{QR_0}(x^*(p)) & \text{für } p \in \text{char } \underline{X} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, und sei $\underline{Y} = LF(y)$.

Dann ist $\underline{Y} \in \Phi_{SF}(\underline{X})$.

Beweis: Wir betrachten eine Gruppe $X \in B(\underline{Y})$. Auf eine gesättigte Formation $\underline{H}$ mit $\underline{H} = LF(h^*)$ mit minimaler lokaler Erklärung h^* und $SF(X, \underline{H}) = \underline{X}$ wenden wir den Reduktionsschritt (6.1.2) an:

Ist $X \in P_1^q \cap \underline{Y}$ für ein q , so ist $\bar{X} := X/S(X) \in y^*(q)$, wobei y^* die minimale lokale Erklärung von $\underline{Y}$ bezeichnet. Weil sowohl $(G/S(G) | G \in P_1^q \cap Q(X))$ als auch $(G | G \in P_2^q \cap Q(X))$ in $Q(\bar{X})$ und somit in $y^*(q) \subseteq y(q) = \Phi_{QR_0}(x^*(q))$ enthalten sind, folgt $x^*(q) = h^*(q)$. Also gilt $X \in S_q h^*(q) \subseteq \underline{H}$.

Ist $X \in P_2^q \cap \underline{Y}$ für ein q , so führt $X \in y^*(q) \subseteq y(q)$ auf $x^*(q) = h^*(q)$ und so auf $X \in h^*(q) \subseteq \underline{H}$.

Also ist in beiden Fällen $\underline{H} = \underline{X}$ und so $\underline{Y} \in \Phi_{SF}(\underline{X})$. q.e.d.

Bei Verwendung der lokalen Erklärung y (mit Voraussetzungen und Notation wie in (6.2.1)) ist zu beachten, daß y im allgemeinen nicht inklusiv für $\underline{Y}$ ist, wie ein Beispiel zeigen wird (vgl. Beweis zu (6.2.2)). Für das Ziel der Bestimmung der lokalen Formation $\Phi_{SF}(\underline{X})$ erweist sich dieser Umstand wiederum nicht als tragisch, denn in $\Phi_{SF}(\underline{X})$ ist $y(p)$ für alle $p \in \text{char } \underline{X}$ enthalten, dies gilt sogar für die volle lokale Formation $S_p y(p)$:

(6.2.2) ADDENDA: Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in (6.2.1).

(a) Im allgemeinen ist nicht y inklusive lokale Erklärung von $\underline{Y}$.

(b) Für alle $p \in \text{char } \underline{X}$ gilt $S_p y(p) \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$.

Beweis:

(a) Sei $C \cong C_4$, und sei $X \in P_1^5$ mit $X/S(X) \cong C$ (bekanntlich ist $|X|=20$). Sei $\underline{X} = LF(x^*)$ die von X erzeugte gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* .

Nach (3.1.2) sind

$$x^*(5) = QR_0(G/S(G) | G \in P_1^5 \cap Q(X)) = QR_0(C) \quad \text{und} \\ x^*(2) = (1)$$

bei $\text{char } \underline{X} = \{2, 5\}$. Mit (5.2.3) ist

$$y(5) = \Phi_{QR_0}(QR_0(C)) = QR_0(C_2),$$

aber es ist $C_2 \notin LF(y)$, denn $y(2)$ ist leer.

Also ist y keine inklusive lokale Erklärung von $LF(y) = \underline{Y}$.

(b) Sei $X \in \underline{S}_p y(p) \setminus \Phi_{SF}(\underline{X})$ von kleinster Ordnung, dann ist X primitiv und monolithisch nach [11, 2.1], und wir können den Reduktionsschritt gehen, wenn $\underline{H}$ eine gesättigte Formation mit $\underline{X} = SF(X, \underline{H})$ ist.

Ist X primitiv mit $O_p(X) = 1$, so ist $X \in y(p)$, und weil $y(p)$ die QR_0 -Frattiniklasse von $x^*(p)$ ist, erhalten wir sofort $x^*(p) = h^*(p)$.

Ist $X \in \underline{P}_1^p$, so ist $X/S(X) \in y(p)$, und wie im Beweis von (6.2.1) folgt $X \in \underline{S}_p h^*(p) \subseteq \underline{H}$.

Also gilt in jedem Fall $\underline{H} = \underline{X}$, es folgt $X \in \Phi_{SF}(\underline{X})$. q.e.d.

Auch wenn diese Art, zur Frattiniklasse beizutragen, sehr natürlich anmutet, löst sie das Problem im allgemeinen nicht vollständig. Zudem ist die in (6.2.1) bestimmte lokale Erklärung y nicht notwendig in der minimalen lokalen Erklärung φ^* von $\Phi_{SF}(\underline{X}) = LF(\varphi^*)$ enthalten:

(6.2.3) BEISPIEL: Sei $\underline{X} = LF(x^*) = SF(S_4)$ die von der symmetrischen Gruppe S_4 erzeugte gesättigte Formation. Dann gelten mit Notation wie in (6.2.1) und φ^* für die minimale lokale Erklärung von $\Phi_{SF}(\underline{X})$:

- (1) $\Phi_{SF}(\underline{X}) = SF(S_3)$
- (2) $LF(y) = \underline{N}_{\{2,3\}} \nsubseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$
- (3) $y(2) \nsubseteq \varphi^*(2)$.

Beweis: Für die minimale lokale Erklärung x^* erhalten wir nach (3.1.2) und (2.4.6)

$$x^*(2) = QR_0(S_3) = R_0(S_3, \underline{K}_2)$$

$$x^*(3) = QR_0(C_2) = \underline{K}_2$$

bei $\text{char } \underline{X} = \{2, 3\}$, und mit (5.2.7) folgen

$$y(2) = \underline{K}_2$$

$$y(3) = (1).$$

Wir bestimmen die SF-Basis $B(\underline{X})$: Es ist $B(\underline{X}) \subseteq P_1^2 \cup P_1^3$.

Ist $X \in P_1^2 \cap B(\underline{X})$, so muß $\bar{X} := X/S(X)$ monolithische Gruppe in $x^*(2)$ sein, wegen $x^*(2) = R_0(S_3, \underline{K}_2)$ gilt dann $\bar{X} \in (S_3, C_2, 1)$. Weil X nach [11, section 1] das semidirekte Produkt eines treuen irreduziblen $\mathbb{F}_2 \bar{X}$ -Moduls mit $\bar{X}$ ist, aber als solches für $\bar{X} \cong S_3$ nur isomorph zu S_4 sein kann, für $\bar{X} = 1$ nur C_2 in Frage kommt und für $X \cong C_2$ kein treuer $\mathbb{F}_2$ -Modul existiert, erhalten wir $P_1^2 \cap B(\underline{X}) = ([S_4], [C_2])$.

Ist $X \in P_1^3 \cap B(\underline{X})$, so ist $\bar{X} \in \underline{K}_2$; es hat nur C_2 einen nichttrivialen irreduziblen treuen Modul über $\mathbb{F}_3$, also ist $P_1^3 \cap B(\underline{X}) = ([S_3], [C_3])$.

Damit ist $B(\underline{X}) = ([S_4], [S_3], [C_3], [C_2])$ bestimmt.

Betrachten wir $SF(B(\underline{X}) \setminus [X])$ für jede Gruppe $X \in B(\underline{X})$, so ist $SF(S_3)$ das einzige maximale Teilobjekt von $\underline{X}$, und nach (4.1.4) folgt $\Phi_{SF}(\underline{X}) = SF(S_3)$, also Aussage (1).

Für die minimale lokale Erklärung Φ^* gilt nach (3.1.2)

$$\Phi^*(3) = QR_0(C_2) = \underline{K}_2$$

$$\Phi^*(2) = (1),$$

insbesondere ist $y(2) \notin \Phi^*(2)$, also gilt Aussage (3).

Weiter ist $\underline{Y} = \underline{S}_2, \underline{S}_2 Y(2) \wedge \underline{S}_3, \underline{S}_3 Y(3) \wedge \underline{S}_{\{2,3\}} = \underline{S}_3 \underline{S}_2 \wedge \underline{S}_2 \underline{S}_3 = \underline{N}_{\{2,3\}}$
und wegen $\underline{S}_3 \nsubseteq \underline{Y}$ folgt $\underline{Y} \notin \Phi_{SF}(\underline{X})$, also Aussage (2). q.e.d.

Für Aussage (3) aus (6.2.3) genügt schon das einfachere Beispiel $SF(S_3)$, an dem auch deutlich wird, daß die SF -Frattiniklasse einer von einer primitiven Gruppe X erzeugten gesättigten Formation nicht immer die Gestalt $SF(X/S(X))$ hat, und daß $SF(X/S(X))$ oft nicht maximal in $SF(X)$ ist (6.3.2).

Nachdem wir bemerkt haben, daß die über die QR_0 -Frattiniklassen der minimalen lokalen Erklärung definierte gesättigte Formation $LF(y)$ (6.2.1) oft zu klein zur Bestimmung von $\Phi_{SF}(\underline{X})$ für eine gesättigte Formation $\underline{X}$ ist, könnte die Vermutung entstehen, die lokal durch die QR_0 -Frattiniklassen der kanonischen lokalen Erklärung definierte gesättigte Formation könne weiterhelfen. Dieser Ansatz erweist sich jedoch als abwegig, denn die so gewonnene lokale Formation ist $\underline{X}$ selbst:

(6.2.4) LEMMA: Sei $\underline{X} = LF(\bar{x}) = LF(x^*)$ gesättigte Formation mit kanonischer und minimaler lokaler Erklärung $\bar{x}$ und x^* .

Sei eine Formationenfunktion h durch

$$h(p) = \Phi_{QR_0}(\bar{x}(p)) \quad \text{für alle } p \in \text{char } \underline{X}$$

und $h(p) = \emptyset$ für $p \notin \text{char } \underline{X}$ definiert.

Dann ist $x^*(p) \in h(p)$, also $LF(h) = \underline{X}$.

Beweis: Sei $X: x^*(p)$ monolithisch. Dann können wir $O_p(X)=1$ annehmen, denn wegen $x^*(p)=Q(G/O_{p,p}(G) | G \in \underline{X})$ ist andernfalls $X \in Q(Y)$ für eine Gruppe $Y \in x^*(p)$ mit $O_p(Y)=1$. Also gibt es nach (1.3.1-b) eine Gruppe $H \in P_{\underline{X}}^p \cap \bar{x}(p)$ wegen $S_p \bar{x}(p) = \bar{x}(p)$, für die $X = (Q-1)(H)$ gilt, und zusammen mit (5.2.6) folgt $X \in \Phi_{QR_0}(\bar{x}(p))$.

Also gilt $x^*(p) \leq h(p)$ für alle p char $\underline{X}$. q.e.d.

Da die gesättigte Formation, die von einer Gruppe $G \neq 1$ erzeugt wird, nichttriviale SF-Frattiniklasse hat (4.1.6), ist in diesem Fall $LF(h)$ aus (6.2.4) nicht in $\Phi_{SF}(\underline{X})$ enthalten.

Vermöge der Inklusion von $\underline{Y}$ aus (6.2.1) in $\Phi_{SF}(\underline{X})$ für eine gesättigte Formation $\underline{X}$ sind wir in der Lage, als Korollar zu dem Hauptergebnis (5.3.4) über QR_0 -Frattiniklassen einen verbreiteten Typ gesättigter Formationen anzugeben, die keine maximalen gesättigten Teilformationen zulassen.

(6.2.5) THEOREM: Sei $\underline{X} = LF(x^*)$ eine gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* , die die Sättigungsbedingung (+) für alle p char $\underline{X}$ erfüllt.

(+) $\left\{ \begin{array}{l} x^*(p) \text{ ist gesättigte Formation mit gesättigter} \\ \text{kanonischer lokaler Erklärung, und es ist } x^*(p) \neq (1). \end{array} \right.$

Dann ist $\Phi_{SF}(\underline{X}) = \underline{X}$, das heißt, $\underline{X}$ hat keine maximalen gesättigten Teilformationen.

Beweis: Mit der Vorbemerkung ist der Beweis klar: Jede lokale Formation $x^*(p)$ für p char $\underline{X}$ erfüllt die Vorausset-

zung des Theorems (5.3.4) über gesättigte Formationen ohne maximale Teilformationen, also ist $\Phi_{QRO}(x^*(p)) = x^*(p)$. Mit Satz (6.2.1) und entsprechender Notation folgt

$\underline{Y} = \underline{X} \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$, also ist $\Phi_{SF}(\underline{X}) = \underline{X}$ wie behauptet. q.e.d.

Eine gesättigte Formation mit Sättigungsbedingung (+) aus (6.2.5) und Charakteristik π enthält N_{π}^2 - dies folgt aus der lokalen Erklärbarkeit. Klassen mit $x^*(p) = (1)$ müssen ausgeschlossen werden, weil $\Phi_{SF}(\underline{S}_p) = (1)$ ist (6.1.1). (In mancher Literatur fiele die lokale Erklärung $\emptyset$ von (1) unter die Konvention, daß eine Formation nicht leer sein darf.) Mit diesen Ausnahmen stellen wieder die primitiv gesättigten Formationen ([16], vgl. (5.3), S.92) Beispiele für Klassen mit $\Phi_{SF}(\underline{X}) = \underline{X}$, so auch gesättigte Formationen der Gestalt $\underline{X} = N_{\pi}^2 \underline{F}$ für eine gesättigte Formation $\underline{F}$ der Charakteristik π (vgl. (5.3)).

Ein Beispiel einer gesättigten Formation zwischen $\underline{N}$ und $\underline{N}^2$, die nicht von endlich vielen Gruppen erzeugt wird, aber maximale Teilformationen hat, ist die Klasse $\underline{U}$ der überauflösbaren Gruppen. Insbesondere stimmt in diesem Fall $LF(y)$ aus (6.2.1) mit der nichttrivialen SF-Frattiniklasse überein:

(6.2.6) BEISPIEL: Für $\underline{X} = \underline{U}$ seien die Bezeichnungen wie in (6.2.1).

Dann ist $\Phi_{SF}(\underline{U}) = LF(y) \subsetneq \underline{U}$.

Beweis: Zu den Eigenschaften der gesättigten Formation $\underline{U}$ der überauflösbaren Gruppen vergleiche man [17, VI 9; II 3.10] Für alle $p \in \mathbb{P}$ seien $p_1, \dots, p_{n_p}$ die Primzahlen, die $(p-1)$ teilen, und sei a_i der höchste Exponent mit $p_1^{a_i} \mid (p-1)$ für $i \in \Omega_p := \{1, \dots, n_p\}$. Dann ist die minimale lokale Erklärung von $\underline{U}$ durch

$$u^*(p) = QR_O(C_t \mid t=p_i^{a_i}, i \in \Omega_p)$$

gegeben, und

$$y(p) = QR_O(C_t \mid t=p_i^{a_i-1}, i \in \Omega_p)$$

folgt leicht (man vergleiche hier den Beweis zu Satz (5.1.2)).

Um zu zeigen, daß y mit der minimalen lokalen Erklärung von $\Phi_{SF}(\underline{U})$ übereinstimmt, weisen wir nach, daß eine Gruppe $X \in B(\underline{U}) \setminus B(\underline{Y})$ nicht in der SF-Frattiniklasse von $\underline{U}$ liegt:

Wegen $X \in B(\underline{U})$ ist $X \in \underline{P}_1^q \cap \underline{U}$ (für ein $q \in \mathbb{P}$) mit $\bar{X} := X/S(X)$ monolithisch, und da $X \notin \underline{Y}$ ist, gibt es ein $j \in \Omega_q$ mit $|\bar{X}| = q_j^{a_j}$. Bezeichnet $X_1 \in \underline{P}_1^q \cap \underline{U}$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung $q \cdot q_1^{a_1}$ (diese existiert nach Definition der q_i, a_i und nach [17, II 3.10]) für $i \in \Omega_q$, so ist für

$$\underline{H} := ((\underline{U} \cap \underline{P}_1^p \mid p \neq q), (X_1 \mid i \in \Omega_q \setminus \{j\}))$$

dann $SF(X, \underline{H}) = \underline{U}$. Aber $SF(\underline{H}) \neq \underline{U}$ gilt wegen $h^*(q) \neq u^*(q)$ für die minimale lokale Erklärung h^* von $SF(\underline{H})$.

Also ist $X \notin \Phi_{SF}(\underline{U})$, und die Behauptung ist bewiesen. q.e.d.

6.3. Ansatz zur Bestimmung der SF-Frattiniklassen

Über PQ-Frattiniklassen

In diesem Abschnitt behandeln wir den Ansatz zur Bestimmung der SF-Frattiniklasse einer gesättigten Formation $\underline{X}$, der von der Seite der Schunck-Frattiniklasse von $\underline{X}$ herkommt. Weil das Verhältnis von Schunckklassen zu gesättigten Formationen von dem Universum abhängig ist (etwa sind Schunckklassen in $\underline{E}$ nicht D_0 -abgeschlossen), sind hier für die Universen $\underline{S}$ und $\underline{E}$ zunächst getrennte Wege zu gehen.

Innerhalb der Klasse der nilpotenten Gruppen ist offensichtlich $\Phi_{PQ}(\underline{X}) = \Phi_{SF}(\underline{X}) = (1)$. Obwohl im Universum $\underline{S}$ die Vermutung der Inklusion der PQ-Frattiniklasse in der SF-Frattiniklasse naheliegt, gehen in den Beweis Resultate über die QR_0 -Frattiniklasse und deren Zusammenhang zu einer gesättigten Formation ein.

(6.3.1) SATZ: Sei $\underline{X}$ eine gesättigte Formation auflösbarer Gruppen.

Dann ist $\Phi_{PQ}(\underline{X}) \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$.

Beweis: Sei x^* die minimale lokale Erklärung von $\underline{X}$. Gemäß (4.3.1) erzeugt die Klasse $\underline{Z} = P_n(Q-1)(\underline{X} \cap P)$ die Schunck-Frattiniklasse von $\underline{X}$. Wir zeigen $\underline{Z} \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$:

Ist $X \in \underline{Z}$, so ist $X \in P_1^D$ für ein $p \in P$, und es gibt eine Gruppe $H \in P_1^Q \cap \underline{X}$ mit $q \in P$ und $X \in (Q-1)(H)$, also ist $X \in x^*(q)$ für die minimale lokale Erklärung x^* von $\underline{X}$.

Wir wenden den Reduktionsschritt (6.1.2) auf eine gesättigte Formation $\underline{H}$ an, die $\underline{X}$ zusammen mit X erzeugt, und erhalten nach (5.2.6)

$$(G/S(G) \mid G \in \underline{P}_1^Q \cap Q(X)) \leq (Q-1)(X) \cap x^*(q) \leq \Phi_{QR_0}(x^*(q)).$$

Daraus folgt $X \in \underline{H}$, also $X \in \Phi_{SF}(\underline{X})$.

Mit $\underline{Z}$ ist auch das Erzeugnis von $\underline{Z}$ in der SF-Frattiniklasse von $\underline{X}$ enthalten. q.e.d.

Auch die gesättigte Formation, die von der Schunck-Frattiniklasse erzeugt wird, ist im allgemeinen nicht die ganze SF-Frattiniklasse (hier für $\underline{S}_3$). So wird am Beispiel der von der symmetrischen Gruppe S_3 erzeugten gesättigten Formation klar, daß $LF(y)$ (6.2.1) und $\Phi_{PQ}(\underline{X})$ (6.3.1) unterschiedliche Teile zu $\Phi_{SF}(\underline{X})$ für eine gesättigte Formation $\underline{X}$ beitragen:

(6.3.2) BEISPIEL: Sei $\underline{X} = LF(x^*) = SF(S_3)$ die von der symmetrischen Gruppe S_3 erzeugte gesättigte Formation.

Dann gelten mit Notation wie in (6.2.1):

- (1) $\Phi_{SF}(\underline{X}) = \underline{N}_{\{2,3\}} = SF(LF(y), \Phi_{PQ}(\underline{X}))$
- (2) $LF(y) = \underline{S}_3 \mp \Phi_{SF}(\underline{X})$
- (3) $\Phi_{PQ}(\underline{X}) = \underline{S}_2 \mp \Phi_{SF}(\underline{X})$
- (4) $SF(X/S(X))$ ist nicht SF-maximal in $SF(X)$.

Beweis: Wir bestimmen x^* nach (3.1.2) und dann y wie folgt:

$$\begin{array}{ll} x^*(3) = \underline{K}_2 & y(3) = (1) \\ x^*(2) = (1) & y(2) = \emptyset, \end{array}$$

dabei ist $\text{char } \underline{X} = \{2, 3\}$. Es folgt $\text{LF}(Y) = S_3$. Mit einem Blick auf den Beweis von (6.2.3) folgt

$$\underline{P} \cap \underline{X} = (S_3, C_3, C_2), \text{ und}$$

$$\underline{P} \cap (Q-1)(\underline{P} \cap \underline{X}) = (C_2)$$

ist die Basis der PQ-Frattiniklasse $\Phi_{PQ}(\underline{X}) = S_2$ nach (4.3.1).

Da $\text{SF}(\text{LF}(Y), \Phi_{PQ}(\underline{X})) = N_{\{2, 3\}}$ als einzige Basisgruppe S_3 nicht enthält, aber S_3 die Klasse $\underline{X}$ erzeugt, ist mit $N_{\{2, 3\}}$ die SF-Frattiniklasse gefunden. Damit sind die Aussagen (1)-(4) gezeigt. q.e.d.

Als Korollar zu (6.3.1) erhalten wir unmittelbar (6.3.3):

(6.3.3) KOROLLAR: Sei $\underline{X}$ eine gesättigte Formation auflösbarer Gruppen.

Dann ist $(Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}) \leq \Phi_{\text{SF}}(\underline{X})$.

In der Allgemeinheit von $\underline{Z} = \underline{P} \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}) \leq \Phi_{\text{SF}}(\underline{X})$ für eine gesättigte Formation $\underline{X}$ ist das Ergebnis aus (6.3.1) nur im Universum auflösbarer Gruppen sinnvoll, dies wird durch die folgenden typischen Situationen demonstriert (vgl. (3.2.1)):

(6.3.4) BEISPIELE:

(1) Seien $X \in P_2^P$ und $Y \in P_1^P$ mit $Y/S(Y) \cong X$ gemäß (1.3.1-b) gegeben; dann ist $\text{SF}(X) = \text{SF}(Y) =: \underline{X}$, wie schon in (3.2.1) erwähnt, aber nach (4.3.1) ist $X \in \Phi_{PQ}(\underline{X})$.

(2) Ist $Y \in \underline{P}_3$ und N minimaler Normalteiler von Y , so ist $X := Y/N \in \underline{P}_2$, und es gilt $QR_0(X) = QR_0(Y)$, das impliziert $SF(X) = SF(Y) =: \underline{X}$. Aber wieder ist $X \in \Phi_{PQ}(\underline{X})$ nach (4.3.1).

Für die übrigen Kombinationsmöglichkeiten primitiver Typen von Gruppen X und Y mit $X \in (Q-1)(Y)$ wie in (6.3.4) sind Analoga zur Inklusion aus (6.3.1) richtig. Aus Vollständigkeitsgründen notieren wir das allgemeine Ergebnis:

(6.3.5) SATZ: Sei $\underline{X}$ eine gesättigte Formation, und seien

$$\underline{Z}_1 := \underline{P}_1 \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P})$$

$$\underline{Z}_2 := \underline{P} \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}_2)$$

$$\underline{Z}_3 := \underline{P}_3 \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}_3)$$

Dann gelten $\underline{Z}_3 \subseteq \underline{Z}_2$ und $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2) \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$.

Beweis: Zu $X \in \underline{Z}_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei Y jeweils so bestimmt, daß $X \in \underline{P} \cap (Q-1)(Y)$ mit $Y \in \underline{X} \cap \underline{P}$ für $i=1$ und mit $Y \in \underline{X} \cap \underline{P}_i$ für $i \in \{2, 3\}$ gelten.

(1) In $\underline{Z}_1$ haben wir $X \in \underline{P}_1$, und ist zusätzlich $Y \in \underline{P}_1$, so erfolgt der Beweis wie für $\underline{X} \subseteq \underline{S}$ in (6.3.1), wenn für $q \in \pi(S(X))$ noch $\underline{P}_1^q \cap (X) = \emptyset = \underline{P}_2^q \cap (X)$ beachtet wird.

Für $Y \in \underline{P}_2$ verweisen wir auf Beweisteil (2), der Fall $Y \in \underline{P}_3$ kann auf den Fall $Y \in \underline{P}_2$ zurückgeführt werden.

(2) Für $\underline{Z}_2$ ergibt $Y \in \underline{P}_2^q$ (ein $q \in \text{char } \underline{X}$) nun $Y \in x^*(q)$, folglich $X \in (Q-1)(Y) \subseteq \Phi_{QR_0}(x^*(q)) \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$ nach (5.2.6) und (6.2.2-b).

(3) Für $(X, Y) \in \underline{P}_3$ gelten gemäß der Struktur der Gruppen

des primitiven Typs 3 auch $X \in (Q-1)(Y/N)$ für $N \triangleleft Y$ und $Y/N \in P_2$, also folgt die Inklusion von $\underline{Z}_3$ in $\underline{Z}_2$. q.e.d.

(6.3.6) SATZ: Sei $\underline{X} = LF(x^*)$ eine gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* .

Dann gilt für alle $p \in \text{char } \underline{X}$:

$$x^*(p) \cap P_1 \subseteq P_1(Q-1)(\underline{X} \cap P_1) = \Phi_{SF}(\underline{X})$$

Beweis: Wir betrachten eine Gruppe $X \in P_1^q \cap x^*(p)$ für $\{p, q\} \in \text{char } \underline{X}$.

Im Fall $p \neq q$ ist eine Gruppe $H \in P_1^p \cap \underline{X}$ mit $H/S(H) \cong X$, wie (1.3.1-b) sie liefert, hinreichend für unsere Zwecke.

Ist $p = q$, so gibt es in Hinblick auf

$$x^*(p) = Q(G/O_{p,p}(G) \mid G \in \underline{X})$$

eine Gruppe $Y \in x^*(p)$ mit $X \in Q(Y/F(Y))$ und $O_p(Y) = 1$, so daß wir Lemma (1.3.2-c) anwenden können. Damit folgt die Behauptung $x^*(p) \cap P_1 \subseteq P_1(Q-1)(\underline{X} \cap P_1)$, die zweite Inklusion steht in (6.3.5). q.e.d.

Nach (6.3.6) liegen die primitiven Gruppen des Typs 1 aus der minimalen lokalen Erklärung einer gesättigten Formation schon im PQ-Anteil der SF-Frattiniklasse. - Wir erinnern noch einmal an das Beispiel der von einer primitiven Gruppe des Typs 2 erzeugten gesättigten Formation, um zu erwähnen, daß auch ein Analogon zu (6.3.6) für $x^*(p) \cap P_2$ nicht gelten kann.

6.4. Zusammenfassung über lokale Erklärung der

SF-Frattiniklasse

Im letzten Abschnitt wollen wir zusammentragen, was wir über eine lokale Erklärung der SF-Frattiniklasse einer gesättigten Formation $\underline{X}$ wissen.

Gehen wir von den Resultaten des Satzes (6.3.5) aus und betrachten die Klassen $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ primitiver Gruppen in der Gestalt ihres Erzeugnisses $\underline{G} := \text{SF}(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2)$, so läßt sich $\underline{G}$ wie folgt als lokale Formation beschreiben:

(6.4.1) LEMMA: Sei $\underline{X}$ gesättigte Formation mit $\pi := \text{char } \underline{X}$. Sei $\underline{G} := \text{SF}(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2)$ mit $\underline{Z}_i$ für $i \in \{1, 2\}$ wie in (6.3.5) die von dem Schunckklassenanteil von $\phi_{\text{SF}}(\underline{X})$ erzeugte gesättigte Formation.

Dann ist $\underline{G} = \text{LF}(g^*)$ mit minimaler lokaler Erklärung g^* der Gestalt

$$g^*(p) = \text{QR}_0((G/S(G) \mid G \in \text{P}_1^p \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}_1)), (G \mid G \in \text{P}_2^p \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}_2)))$$

für alle $p \in \pi$, und es gilt $g^* \in \Phi$ für jede lokale Erklärung φ von $\phi_{\text{SF}}(\underline{X})$.

Beweis: Anwendung des Satzes (3.1.2) auf das Homomorph $Q(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2)$ ergibt für alle $p \in \pi$ nun

$$g^*(p) = \text{QR}_0((G/S(G) \mid G \in \text{P}_1^p \cap Q(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2)), (G \mid G \in \text{P}_2^p \cap Q(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2))).$$

Wird beachtet, daß

$$\underline{P}_2^P \cap Q(\underline{P}_1 \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P})) \subseteq (Q-1)(\underline{P}_1^P \cap (Q-1)(\underline{P} \cap \underline{X}))$$

nach (3.1.1-b) gilt, so folgt die Behauptung über die Gestalt von $g^*(p)$.

Wegen $\underline{G} \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$ nach (6.3.5) gilt $g^*(p) \subseteq \Phi^*(p) \subseteq \Phi(p)$ für jede lokale Erklärung ϕ von $\Phi_{SF}(\underline{X})$. q.e.d.

Sowohl der von $\underline{Z}_1$ als auch der von $\underline{Z}_2$ aus (6.3.5) abgeleitete Anteil leisten in (6.4.1) einen wesentlichen Beitrag zu $\underline{G}$: Für $\underline{Z}_1$ diene die Klasse $\underline{S}$ als Beispiel, für $\underline{Z}_2$ die folgende Klasse:

(6.4.2) BEISPIEL: Seien E und F isomorph zu den alternierenden Gruppen A_5 und A_6 respektive, und sei $X = F \wr_n E$ das natürliche Kranzprodukt. Sei $\underline{X} = SF(X)$.

Bezeichnet B die Basisgruppe von X , so ist B Monolith von X , denn E operiert transitiv auf den 5 Kopien von F in B , und F ist einfach und nichtabelsch. Also ist $X \in \underline{P}_2^P$ für $p \in \pi(E) = \pi(F) = \{2, 3, 5\}$, und mit Notation wie in (6.3.5) gilt

$$E \in \underline{P}_2^P \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}_2^P) \subseteq \underline{Z}_2,$$

aber offensichtlich ist $E \notin \underline{Z}_1$.

In der Form aus (6.4.1) können wir den Schunckklassenanteil der SF -Frattiniklasse einer gesättigten Formation $\underline{X}$ mit dem Anteil zusammenfassen, der lokal durch die QR_O -Frattiniklassen der minimalen lokalen Erklärung von $\underline{X}$ gegeben war: Bezeichnet $t(p) = QR_O(y(p), g(p))$ für alle $p \in \text{char } \underline{X}$ (mit y und g wie in (6.2.1) und (6.4.1)) eine Formationenfunktion,

so ist die durch t lokal erklärte Formation $LF(t)$ in der SF-Frattiniklasse von $\underline{X}$ enthalten und hat dieselbe Charakteristik wie $\Phi_{SF}(\underline{X})$, wie wir in (6.4.3) sehen werden.

Für $LF(g)$ oder $LF(y)$ allein gilt das nicht, wir erinnern an das Beispiel der von der symmetrischen Gruppe S_3 erzeugten gesättigten Formation (6.3.2). Im Vergleich zu y für $LF(y)$ (vgl. (6.2.2)) bringt die lokale Erklärung t den zusätzlichen Vorteil, inklusiv für $LF(t)$ zu sein.

(6.4.3) THEOREM: Sei $\underline{X} = LF(x^*)$ eine gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* und Charakteristik π . Seien Formationenfunktionen y, g, t via

$$y(p) = \Phi_{QR_0}(x^*(p))$$

$$g(p) = QR_0((G/S(G) \mid G \in P_{\pi-1}^p(Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P})), (G \mid G \in P_{\pi-2}^p(Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}_{\pi-2})))$$

$$t(p) = QR_0(y(p), g(p))$$

für alle $p \in \pi$ und $y(p) = g(p) = t(p) = \emptyset$ für $p \notin \pi$ definiert, und sei $LF(t)$ die durch t lokal erklärte Formation.

Dann gelten:

$$(a) \quad LF(t) \subseteq \Phi_{SF}(\underline{X})$$

(b) t ist inklusive lokale Erklärung von $LF(t)$.

$$(c) \quad \text{char } LF(t) = \text{char } \Phi_{SF}(\underline{X})$$

Beweis: Nach Vorbemerkung, Lemma (6.4.1) und Satz (6.2.1) bleiben Aussagen (b) und (c) zu zeigen.

(b) Da $g(p) = g^*(p) \subseteq t^*(p) \in LF(t)$ gilt, genügt es, $y(p) \in LF(t)$

für alle $p \in \pi$ nachzuweisen.

Es sei $X \in y(p) \sim \text{LF}(t)$ von minimaler Ordnung.

Ist $X \in \underline{P}_1$, so wenden wir (6.3.6) an: Es ist

$X \in \underline{P}_1 \cap x^*(p) \subseteq \underline{Z}_1 \subseteq \text{LF}(g) \subseteq \text{LF}(t)$ mit $\underline{Z}_1$ wie in (6.3.5).

Ist $X \in \underline{P}_2$, so erhalten wir für $q \in \pi(S(X))$ dann

$X \in y^*(q) \subseteq \text{LF}(y)$ nach (3.1.1-a).

Also haben wir in beiden Fällen einen Widerspruch, und $y(p) \subseteq \text{LF}(t)$ ist richtig.

(c) Bezeichnen $q := \text{char } \Phi_{\text{SF}}(\underline{X})$ und $\tau := \text{char } \text{LF}(t)$, so ist $\tau \leq q$ nach (a). Wir betrachten ein $p \in \pi$.

Ist $x^*(p) \geq (1)$, so ist $y(p) \geq (1)$, also $p \in \tau$.

Für $x^*(p) = (1)$ unterscheiden wir unter Beachtung von (3.1.7) zwei Fälle:

Im ersten Fall gibt es eine Primzahl $q \nmid |p|$ und eine Gruppe $X \in x^*(q)$ mit $p \in \pi(X)$. Betrachten wir einen Hauptfaktor H/K von X , dessen Ordnung von p geteilt wird, so muß es sich wegen $x^*(p) = (1)$ um einen zentralen Hauptfaktor handeln, und $\text{Pr}(X, H/K) \cong H/K \cong C_p \in x^*(q)$ folgt. Da aber alle primitiven Gruppen des Typs 1 aus $x^*(q)$ nach (6.3.6) im Schunckklassen-Anteil von $\Phi_{\text{SF}}(\underline{X})$ liegen, ist $C_p \in \text{LF}(g)$, also $p \in \tau$.

Im zweiten Fall hat $\underline{X}$ die Form $\underline{X} = D_0(\underline{S}_p, \underline{X} \cap \underline{E}_p)$. Nach dem Satz über die direkte Dekomposition der SF-Frattiniklasse (4.2.8) erhalten wir einerseits $C_p \notin \Phi_{\text{SF}}(\underline{X})$, also $p \notin q$, andererseits $g(p) = \emptyset = y(p)$, also $p \notin \tau$.

In jedem Fall gilt $p \in \tau$ genau dann, wenn $p \in q$ ist. q.e.d.

Nach allen uns bekannten Beispielen scheint es sinnvoll, zu vermuten, daß sich die Formationenfunktionen y und g aus (6.4.3) in der Tat zu einer lokalen Erklärung φ der SF-Frattiniklasse ergänzen. Der Versuch eines Beweises scheiterte bislang an der Stelle, an der die Asymmetrie von $t(p)$ eine Reduktion ad absurdum verhindert, dies sei durch das folgende Beispiel (6.4.4) verdeutlicht. Darüber hinaus belegt (6.4.4-d), daß es zur Beschreibung von φ nicht genügt, eine Formationenfunktion $h=y$ oder $h=g$ zusammen mit $h(p)=(1)$ für $p \in \text{char LF}(t) \setminus \text{char LF}(y)$ oder für $p \in \text{char LF}(t) \setminus \text{char LF}(g)$ anzusetzen, das heißt, $\text{LF}(y)$ und $\text{LF}(g)$ liefern über die Charakteristik hinaus signifikante Beiträge zur SF-Frattiniklasse.

(6.4.4) BEISPIEL: Es gibt eine gesättigte Formation $\underline{X}$ und eine Gruppe $X \in \underline{X}$ mit Eigenschaften (a)-(d) bei Notation wie in (6.4.3).

(a) $X \in B(\underline{X})$

(b) $X \in \text{LF}(t)$

(c) $X \notin (\text{LF}(y), \text{LF}(g))$

(d) $y(5) \nsubseteq t(5)$ und $g(5) \nsubseteq t(5)$, aber $5 \in \text{char LF}(y) \cap \text{char LF}(g)$

Beweis:

(1) Sei C isomorph zur zyklischen Gruppe C_4 , es sei $H \in \underline{P}_1^5$ mit $H/S(H) \cong C$, und es sei $K \in \underline{P}_1^7$ mit $K/S(K) \cong H$ (mit (1.3.1-b), Skizze s. S.122).

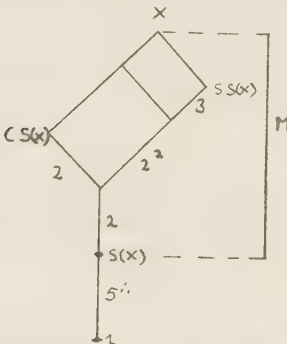
(2) Sei S isomorph zur speziellen linearen Gruppe $SL(2,3)$.



Sei $R \in P_1^3$ mit $R/S(R) \cong S$, und sei $L \in P_1^5$ mit $L/S(L) \cong R$.

(3) Sei M zentrales Produkt von C und S , wobei der minimale Normalteiler von C und das Zentrum von S zu Z amalgamiert werden.

Dann ist M monolithisch: Ist $N \triangleleft M$ mit $N \neq Z$, so ist $N \cap C = N \cap S = 1$ (wobei C und S als Untergruppen von M betrachtet werden). Folglich ist $N \cap S(M/C) \cap S(M/S) = (C_2, 1)$ im Widerspruch zu $N \trianglelefteq NC/C \triangleq M/C \triangleq A_4$. Also ist Z Monolith von M .



Nach (2.1.6) ist $QR_0(M) = QR_0(C, S)$.

(4) Sei $X \in P_1^5$ mit $X/S(X) \cong M$.

(5) Es sei $\underline{X} = SF(K, L)$ mit minimaler lokaler Erklärung x^* . Wir weisen für $\underline{X}$ und X Aussagen (a)-(d) nach:

(6) Nach (3.1.2) berechnen wir $x^*(p)$ für $p \in \text{char } \underline{X} = \{2, 3, 5, 7\}$:

$$x^*(5) = QR_0(G/S(G) | G \in P_1^5 \cap Q(K, L)) = QR_0(R, C)$$

$$x^*(7) = QR_0(H)$$

$$x^*(3) = QR_0(S)$$

$$x^*(2) = QR_0(C_3)$$

Weil $X/S(X) \cong M$ nach (3) in $x^*(5)$ liegt, ist $X \in \underline{X}$, und weil M monolithisch ist (3), ist sogar $X \in B(\underline{X})$. Also gilt Aussage (a).

(7) Wir zeigen $y(5) = QR_0(S)$:

Es ist $S \in (Q-1)(\underline{P} \cap x^*(5)) \subseteq \bigcap_{QR_0} (x^*(5)) = y(5)$ nach (5.2.6).

Sei $G \in x^*(5) \setminus QR_0(S)$ monolithisch. Es ist (nach (2.4.5) mit $p(QR_0(S, C)) \subseteq x^*(5) \subseteq QR_0(S, C)$ in dortiger Notation) nun $x^*(5) = R_0(R, QR_0(S, C))$. Also ist entweder $R \in Q(G)$ oder $G \in QR_0(S, C)$.

Ist $R \in Q(G)$, so ist (G, S, C) erzeugende Klasse von $x^*(5)$, in der G nicht ausgelassen werden darf, also ist $G \in y(5)$.

Ist $G \in QR_0(S, C)$, so hat G eine minimale sd-Darstellung $(G_1, \dots, G_n) \in Q(S, C)$, und wegen $G \notin QR_0(S)$ muß $G_i \cong C$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gelten. Da die Darstellung minimal ist und G monolithisch, ist mit (2.2.1) und (1.2.7) also $G_i \cong C$ Komponente von G als zentralem Produkt, und mit (2.1.6) folgt $C \in QR_0(G)$. Also ist $QR_0(R, G) = x^*(5)$, und wegen $QR_0(R) = x^*(5)$ gilt $G \in y(5)$.

(8) Es ist $g(5) = QR_0(C)$:

Ist $Y \in \underline{X} \cap \underline{P}_1^D$ (für ein $p \in \text{char } \underline{X}$) mit $(Q-1)(Y) \cap \underline{P}_1^5 \neq \emptyset$, so ist $5 \in \text{char } x^*(p)$, und es gilt $\bar{Y} := Y/S(Y) \in x^*(p)$. Mit einem Blick auf die minimalen lokalen Formationen in (6) folgt $p=7$, und wegen $x^*(7) = R_0(H, QR_0(C))$ nach (2.4.6) ist $\underline{P}_1^5 \cap (Q-1)(\underline{X} \cap \underline{P}) = (H)$, also ist $g(5) = QR_0(C)$.

(9) Nach Definition von t in (6.4.3) ist $t(5) = QR_0(S, C)$.

Zusammen mit (7) und (8) zeigt das Aussage (d).

Es ist $X \in \text{LF}(t)$, denn $X/S(X) = X/O_{5,5}(X) \in t(5) \trianglelefteq \text{LF}(t)$ gilt wegen $t(5) = \text{QR}_0(S, C) = \text{QR}_0(M)$ nach (3), das heißt, $S(X)$ ist $t(5)$ -zentral. Damit ist Aussage (b) nachgewiesen.

(10) Wegen $M \ntriangleleft (\text{QR}_0(S), \text{QR}_0(C)) = (y(5), g(5))$ nach Konstruktion von M und (7), (8) ist $S(X)$ weder $y(5)$ -zentral noch $g(5)$ -zentral. Folglich ist $X \notin (\text{LF}(y), \text{LF}(g))$, und es gilt Aussage (c). q.e.d.

ANHANG

In Abschnitt (5.3.) wurde gezeigt, daß gesättigte Formationen mit gesättigter lokaler Erklärung keine maximalen Teilformationen haben. Bei der Begutachtung einer früheren Version dieser Arbeit (Dezember 1985) konnte R. BRYCE, Australian National University, Canberra, die in der Einleitung (S. 5) genannte offene Frage beantworten: Es gibt keine gesättigten Formationen mit maximalen Teilformationen (siehe (A2)).

Dazu beweist BRYCE zunächst, daß echte Faktorgruppen nicht nur primitiver (5.2.6), sondern beliebiger monolithischer Gruppen einer Formation $\underline{F}$ in der QR_0 -Frattiniklasse von $\underline{F}$ liegen (A1). Das Kriterium

$$QR_0(G/S(G)) \subseteq \Phi_{QR_0}(QR_0(G)) \quad \text{für } G \in \underline{M}$$

haben wir (S.89) als Frage angesprochen, zusammen mit einem Hinweis auf die Lösung des Problems für gesättigte Formationen.

Im folgenden stellen wir den von R. BRYCE mitgeteilten Beweis dar und klären das Verhältnis zu unseren Ergebnissen.

(A1) LEMMA (BRYCE): Sei $\underline{F}$ eine Formation, und sei $G \in \underline{F} \cap \underline{M}$.

Dann ist $(Q-1)(G) \subseteq \Phi_{QR_0}(\underline{F})$.

Beweis: Nach (4.1.4) genügt es zu zeigen, daß $(Q-1)(G) \cap \underline{M}$ in jeder maximalen Teilformation von $\underline{F}$ enthalten ist.

Für einen Widerspruch betrachten wir eine Gruppe $X \in (Q-1)(G) \cap \underline{M}$ minimaler Ordnung mit der Eigenschaft, daß es eine maximale Teilformation $\underline{H}$ von $\underline{F}$ gibt, in der X nicht enthalten ist.

Wegen der Maximalität von $\underline{H}$ ist $QR_0(X, \underline{H}) = \underline{F}$, also gibt es Gruppen L, K, H, X_i ($i=1, \dots, n$ für ein $n \in \mathbb{N}$) mit $H \in \underline{H}$ und $X_i \cong X$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ sowie

$$K \trianglelefteq L \text{ sd } D := X_1 * \dots * X_n * H,$$

so daß $L/K \cong G$ gilt.

Mit der Bezeichnung $T := S(X_1) * \dots * S(X_n)$ gelten:

$$(1) \quad T \trianglelefteq D$$

$$(2) \quad D/T \in \underline{H} \quad (\text{denn die Minimalität von } X \text{ sichert } X/S(X) \in \underline{H})$$

$$(3) \quad L/T \text{ sd } X_1/S(X_1) * \dots * X_n/S(X_n) * H \cong D/T$$

$$(4) \quad T \cap L \trianglelefteq S(L)$$

Es folgt

$$L^{\underline{H}} T / T = (L T / T)^{\underline{H}} = 1,$$

also

$$L^{\underline{H}} \trianglelefteq T \cap L \trianglelefteq S(L)$$

nach (4). Somit ist

$$G^{\underline{H}} \cong (L/K)^{\underline{H}} = L^{\underline{H}} K / K \trianglelefteq S(L) K / K \trianglelefteq S(G),$$

aber $G^{\underline{H}} \trianglelefteq S(G)$ steht in Widerspruch zu $X \in (Q-1)(G) \setminus \underline{H}$.

Damit liegt $(Q-1)(G)$ in jeder maximalen Teilformation von $\underline{F}$, also ist die Behauptung gezeigt. q.e.d.

(A2) SATZ (BRYCE): Seien $\underline{F}$ eine Formation und $\underline{X}$ eine gesättigte Teilformation von $\underline{F}$, sei $\underline{X} \neq (1)$.

Dann ist $\underline{X} \subseteq \Phi_{QR_0}(\underline{F})$.

Insbesondere ist $\Phi_{QR_0}(\underline{F}) = \underline{F}$, falls $\underline{F}$ gesättigt ist.

Beweis: Sei G monolithische Gruppe aus $\underline{X}$, und sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid |S(G)|$.

Seien V der triviale $\mathbb{F}_p G$ -Modul, weiter $P := P_G(V)$ die projektive Hülle von V in G , und sei $H := [P]G$ semidirektes Produkt von P und G .

Nach (1.3.4-2-2) und (1.3.4-3-2) ist H monolithische Gruppe aus $\underline{X}$, und nach Konstruktion gilt $G \in (Q-1)(H)$. Mit Kriterium (A1) folgt, daß G in der QR_0 -Frattiniklasse von $\underline{F}$ liegt. q.e.d.

In Formulierung ähnlich wie in (5.3.3) wurde im Beweis von (A2) folgendes gezeigt:

(A3) KOROLLAR: Zu einer monolithischen Gruppe G gibt es eine Gruppe H mit Eigenschaften (1)-(3):

- (1) $H \in \underline{M}$
- (2) $G \in (Q-1)(H)$
- (3) $H \in SF(G)$

Insbesondere ist $G \in \Phi_{QR_0}(\underline{F})$ für jede Formation $\underline{F}$, die die von G erzeugte gesättigte Formation enthält.

Entscheidend für die Verkürzung des Beweises und die Abschwächung der Voraussetzung in Satz (5.3.3)/(5.3.4) ist die Verwendung des Lemmas (A1) anstelle des Kriteriums (5.2.1).

Die Aussagen (5.1.1), (5.3.1)-(5.3.4) betreffen gesättigte Formationen und sind somit durch (A2) erfaßt. Lemma (5.2.6) ist ein Spezialfall von (A1). In Abschnitt (6.2.) ergibt sich aus (A2) und (6.2.1) die folgende stärkere Aussage anstatt (6.2.5), deren Beweis dem von (6.2.5) entspricht:

(A4) SATZ: Sei $\underline{X} = LF(x^*)$ eine gesättigte Formation mit minimaler lokaler Erklärung x^* , die die Bedingung

$$x^*(p) = E_{\phi} x^*(p) \neq (1)$$

für alle $p \in \text{char } \underline{X}$ erfüllt.

Dann ist $\phi_{SF}(\underline{X}) = \underline{X}$.

Mit (A1) kann der Fall gesättigter Formationen behandelt werden. In Hinblick auf die Untersuchung allgemeiner Formationen besteht jedoch zwischen den Kriterien (A1) und (5.2.1) keine Implikation. So erfaßt Kriterium (A1) nur die Fälle, in denen G als Faktorgruppe von H auftritt (dabei bezeichne G die Gruppe, die in $\phi_{QR_0}(\underline{F})$ für $\underline{F} = QR_0 \underline{F}$ liegt, weil es eine Gruppe H zu G gibt, die den Forderungen des jeweiligen Kriteriums genügt). Beim ϕ_{QR_0} -Kriterium (5.2.1) wird zwar Nichtsimilarität (5.2.1-4) verlangt,

jedoch ist andererseits die Voraussetzung $G \in \text{QR}_0(H)$ in (5.2.1-3) schwächer als die Bedingung $G \in (Q-1)(H)$ in (A1). In (5.3.2) wird etwa der S_W -Abschluß ausgenutzt.

Das einfachste Beispiel einer Situation, in der Kriterium (A1) den Kriterien (5.2.1) und (5.2.11) überlegen ist, stellt die Formation $\underline{F} = \text{QR}_0(C_8)$ mit $\Phi_{\text{QR}_0}(\underline{F}) = \text{QR}_0(C_4)$ dar, wie man sich leicht überlegt (vgl. (5.2.3)). In (A5) nennen wir ein Beispiel, in dem die Anwendung des Satzes (5.2.11) über frattinische Hauptfaktoren, einer Konsequenz aus (5.2.1), zum Ziel führt, nicht aber Kriterium (A1).

Offen bleibt weiterhin die Frage einer Charakterisierung der QR_0 -Frattiniklasse einer Formation. Das zeigt auch schon das Beispiel (5.2.8) der Formation $\underline{F} = \text{QR}_0(D_8)$ - wobei D_8 eine Diedergruppe der Ordnung 8 bezeichnet - mit $C_4 \in \Phi_{\text{QR}_0}(\underline{F}) \setminus (Q-1)(\underline{F} \cap \underline{M})$.

(A5) BEISPIEL: Sei $\underline{F}$ die von der speziellen linearen Gruppe $SL(2,3)$ erzeugte Formation. Dann ist die zyklische Gruppe C_2 in $\Phi_{\text{QR}_0}(\underline{F})$, aber es gibt keine monolithische Gruppe $\text{He}\underline{F}$, für die $C_2 \in (Q-1)(H)$ gilt.

Beweis: Sei X isomorph zu $SL(2,3)$. Dann ist der primitive Gruppentyp des Sockels von X wegen $S(X) = Z(X)$ zyklisch von Ordnung 2, und wegen $S(X) = \Phi(X)$ folgt $C_2 \in \Phi_{\text{QR}_0}(\underline{F})$ nach dem Satz (5.2.11) über frattinische Hauptfaktoren (vgl. Bemerkung nach (5.2.11)).

Für einen Widerspruch nehmen wir an, daß es eine Gruppe $H \in \underline{\text{F}}\underline{\text{r}}\underline{\text{M}}$ mit $C_2 \in (Q-1)(H)$ gibt. Nach (2.2.1) hat H eine minimale sd -Darstellung in $Q(X)$, und nach (2.2.3) gilt

$$H/S(H) \in \text{QR}_0(X/S(X)) = \text{QR}_0(A_4)$$

mit der alternierenden Gruppe A_4 . Gemäß (2.4.3) führt das auf einen Widerspruch zu $C_2 \in (Q-1)(H)$.

Also ist $C_2 \notin (Q-1)(\underline{\text{F}}\underline{\text{r}}\underline{\text{M}})$.

q.e.d.

LITERATUR

- [1] D. BLESSENHOHL, B. BREWSTER (1976), Über Formationen und komplementierbare Hauptfaktoren, Arch. Math. 27, 347-351
- [2] H. BÖRNER (1967), Ergebnisbericht Darstellungstheorie, Enzyklopädie der math. Wiss. I 1, 15 (Heft 6, II)
- [3] R. M. BRYANT, R. A. BRYCE, B. HARTLEY (1970), The formation generated by a finite group, Bull. Austr. Math. Soc. 2, 347-357
- [4] R. A. BRYCE, J. COSSEY (1972), Fitting formations of finite soluble groups, Math. Z. 127, 217-223
- [5] A. R. CAMINA (1974), A note on Fittingclasses, Math. Z. 136, 351-352
- [6] R. W. CARTER, B. FISCHER, T. O. HAWKES (1968), Extreme classes of finite soluble groups, J. Algebra 9, 285-313
- [7] J. COSSEY, S. GATES-MACDONALD (1970), On the definition of saturated formations of groups, Bull. Austr. Math. Soc. 4, 9-15
- [8] K. DOERK (1969), Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, J. Algebra 13, 345-373
- [9] K. DOERK (1974), Über Homomorphe endlicher auflösbarer Gruppen, J. Algebra 30, 12-30
- [10] K. DOERK, T. O. HAWKES (1978), On the residual of a direct product, Arch. Math. 30, 458-468
- [11] P. FÖRSTER (1984), Projektive Klassen endlicher Gruppen I, Schunck- und Gaschützklassen, Math. Z. 186, 149-178

- [12] P. FÖRSTER (1985), Projektive Klassen endlicher Gruppen IIa, Gesättigte Formationen: Ein allgemeiner Satz von Gaschütz-Lubeseder-Baer-Typ, Pub. Mat. UAB 29, 2-3, 39-76
- [13] P. FÖRSTER, E. SALOMON (1985), Local definitions of local homomorphisms and formations of finite groups, Bull. Austr. Math. Soc. 31, 5-34
- [14] W. GASCHÜTZ (1979), Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups, Notes on Pure Math. 11, Canberra
- [15] P. HALL (1963), On strictly non-simple groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. 59, 531-533
- [16] T. O. HAWKES (1971), Skeletal classes of soluble groups, Arch. Math. 22, 577-589
- [17] B. HUPPERT (1967), Endliche Gruppen I, Berlin
- [18] B. HUPPERT, N. BLACKBURN (1982), Finite groups II, Berlin
- [19] L. G. KOVACS, M. F. NEWMAN (1966), On critical groups, J. Austr. Math. Soc., 237-250
- [20] H. NEUMANN (1967), Varieties of groups, Berlin
- [21] P. M. NEUMANN (1964), On the structure of standard wreath products of groups, Math. Z. 84, 343-373
- [22] P. M. NEUMANN (1970), A note on formations of finite nilpotent groups, Bull. London Math. Soc. 2. 91
- [23] J. PENSE (1984), Ränder und Erzeugendensysteme von Fittingklassen endlicher Gruppen, Diplomarbeit Univ. Mainz

- [24] P. SCHMID (1978), Every saturated formation is a local formation, J. Algebra 51, 114-118
- [25] H. SCHUNCK (1967), $\underline{H}$ -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen, Math. Z. 97, 326-330
- [26] P. WEICHSEL (1964), On critical p-groups, Proc. London Math. Soc. (3) 14, 83-100

LEBENS LAUF

Ute Christina Herzfeld
Heiligkreuzweg 69
6500 Mainz 26

24.11.1960 geboren in Lieser, Kreis Bernkastel-Wittlich

1970-1978 Besuch der Gymnasien in St.Goarshausen und Bernkastel-Kues

06.06.1978 Abitur am Nikolaus-von-Kues-Gymnasium Bernkastel-Kues

April 1978 Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes

1978-1980 und 1981-1983 Studium der Mathematik und ev. Theologie an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

1980-1981 Studium der Mathematik und Philosophie an der University of Warwick, Coventry, England

1981-1985 Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematics Institute, Warwick, und am Fachbereich Mathematik, Mainz

seit 1982 Studium der Geowissenschaften (Geographie, Geologie/Paläontologie) in Mainz

08.12.1983 Staatsexamen in Mathematik und ev. Theologie in Mainz

1983 Publikation "On generalized covering subgroups and a characterization of 'pronormal'", Arch. Math. 41, 404-409

1984-1986 Arbeit an einer Dissertation in Mathematik bei Prof. Dr. K. Doerk, Mainz

Okt.-Nov. 1984 Teilnahme an Fahrtabschnitt I der Antarktisexpedition 1984/85 als Mitarbeiterin des Alfred-Wegener-Instituts Bremerhaven

seit März 1986 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Geologie der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg

